

俞克斌杯杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (14) 插值法

【觀念核心】

1. 插值法的精髓在於：
一個 n 次多項函數，會被 $n+1$ 個相異 x 值點，唯一決定。
解析幾何的說法就是：
 (x_i, y_i) 是平面上點 P_i 坐標，給了平面上的 $n+1$ 個點 P_0, P_1, \dots, P_n ，
其橫坐標兩兩相異，只能找到一條代表 n 次多項式的曲線通過這些點。
2. 牛頓插值多項式的求法，
例如：若要找通過 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 三點的二次（含以下）多項式，
則可設 $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) + b(x-x_1) + y_1$ ，
再以 $x = x_2$ 、 $x = x_3$ 代入，求出 a 、 b 。
3. 拉格朗日插值多項式的求法，
例如：若要找通過 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 三點的二次（含以下）多項式，
則可設 $f(x) =$

$$y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

【鑑往核心】

1. 假設 $f(x)$ 為三次多項式，且已知 $f(0)=1$ 、 $f(1)=9$ 、 $f(2)=8$ 、 $f(3)=4$ ，
 $y=f(4)$ ，則 $y=$ _____。

[73 日社]

答：3

解：設 $f(x) = a(x)(x-1)(x-2) + b(x)(x-1) + c(x) + d$

$$\text{令 } x=0 \Rightarrow f(0)=d=1$$

$$\text{令 } x=1 \Rightarrow f(1)=c+d=9 \Rightarrow c=8$$

$$\text{令 } x=2 \Rightarrow f(2)=2b+2c+d=8 \Rightarrow b=-\frac{9}{2}$$

$$\text{令 } x=3 \Rightarrow f(3)=6a+6b+3c+d=4 \Rightarrow a=1$$

$$\text{故 } f(x) = x(x-1)(x-2) - \frac{9}{2}x(x-1) + 8x + 1 \quad \text{則 } y = f(4) = 3$$

2. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1) = f(2) = 0$ 且 $f(3) = 4$ 。
則 $a + 2b + c$ 的值是下列哪一個選項？
(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5。

[106 數乙]

答：(4)

解： $f(x) = (x-1)(x-2)(x+m) \xrightarrow{f(3)=4} 4 = 2 \times 1 \times (3+m) \Rightarrow m = -1$
 $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ 。故 $a + 2b + c = 4$

3. 令 $A(-2, 0)$ 、 $B(0, 1)$ 、 $C(2, 1)$ 、 $D(4, 3)$ 為坐標平面上四點。請選出正確的選項。

- (1) 恰有一直線通過 A 、 B 、 C 三點
 (2) 恰有一圓通過 A 、 B 、 D 三點
 (3) 恰有一個二次多項式函數的圖形通過 B 、 C 、 D 三點
 (4) 恰有一個三次多項式函數的圖形通過 A 、 B 、 C 、 D 四點
 (5) 可找到兩平行直線，其聯集包含 A 、 B 、 C 、 D 四點

[102 數甲]

答：(3)(4)(5)

解：(1) 斜率 $m_{AB} = \frac{1}{2} \neq$ 斜率 $m_{BC} = \frac{0}{2}$ ，無法決定一直線
 (2) 斜率 $m_{AB} = \frac{1}{2} =$ 斜率 $m_{BD} = \frac{2}{4}$ ，無法決定一圓
 (3) B, C, D 可決定二次函數 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
 (4) B, C, D, E 可決定三次函數 $y = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 1$
 (5) 一直線過 A 、 B 、 D 三點，另一平行直線過 C 點

析：一個 n 次多項函數，會被 $n+1$ 個相異 x 值點，唯一決定。
 解析幾何的說法就是： (x_i, y_i) 是平面上點 P_i 坐標，
 給了平面上的 $n+1$ 個點 P_0, P_1, \dots, P_n ，其橫坐標兩兩相異，
 只能找到一條代表 n 次多項式的曲線通過這些點。

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 茜茜是個喜愛烹飪的高中生，有一天她將一條鮭魚從冷凍庫拿出來解凍。茜茜希望在烹煮時，魚的溫度至少為 20°C 以上。

| | | | | |
|---------------------------|----|----|----|---|
| 時間 (小時) | 0 | 1 | 2 | 4 |
| 魚的溫度 ($^\circ\text{C}$) | -4 | -3 | -2 | 1 |

因此茜茜以「小時」為單位，紀錄解凍後的時間與溫度，如附表所示。

舉例來說，拿出來解凍 2 小時後，魚的溫度為 -2°C 。

茜茜利用此 4 筆資料來做一個次數為 3 次的插值多項式，用來模擬真實的溫度函數。

試利用此三次多項式來估計，拿出來解凍至少幾小時（整數）後，

茜茜就可以開始調理鮭魚？

- (1)6 小時 (2)7 小時 (3)8 小時 (4)9 小時 (5)10 小時。

[台北區聯合學測模擬考]

2. 設 $f(x)$ 為三次多項式，且 $x-1$ 、 $x-2$ 、 $x-3$ 皆為 $f(x)$ 的一次因式，若 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 48，則函數 $y=f(x)$ 與 y 軸的交點座標為_____。

[學測模]

3. 已知 $f(x)$ 為首項係數為 1 的四次方程式，若 $f(2008)=f(2009)=f(2011)=f(2012)=26$ ，則 $f(2010)=$ _____。

[中山附中]

4. 已知 $f(x) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$ ，

請選出正確的選項：

- (1) $f(x)$ 的最大值為 $\frac{7}{3}$
- (2) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 2
- (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $8x-10$
- (4) 方程式 $f(x)=0$ 在區間 $(1,4)$ 沒有實根
- (5) 滿足不等式 $f(x)>0$ 的整數解恰有 1 個。

[中文中學測模]

5. 已知 $f(x) = 3 \cdot \frac{(x+\sqrt{2})(x-5)}{(\pi+\sqrt{2})(\pi-5)} + 1 \cdot \frac{(x-\pi)(x+\sqrt{2})}{(5-\pi)(5+\sqrt{2})} + 3 \cdot \frac{(x-5)(x-\pi)}{(-\sqrt{2}-5)(-\sqrt{2}-\pi)}$.

請選出正確的選項。

- (1) $f(0) > 0$
- (2) $y = f(x)$ 描繪在座標平面的圖形為開口向上的拋物線
- (3) 在座標平面上， $y = f(x)$ 的圖形頂點在第二象限
- (4) $xf(x) + 0.01 = 0$ 有 1 個正實根 2 個負實根
- (5) $xf(x) - 0.01 = 0$ 的三個實根總和為正數

[雄中學測模]

6. 設 $f(x) = \frac{23}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{10}{3}(x-2)(x-3)(x-4) - 11(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{21}{2}(x-1)(x-3)(x-4)$.

則 $f(105) = \underline{\hspace{2cm}}$.

[雄中]

7. 設5次多項式 $f(x)$ 被 $x+2$ 、 x 、 $x-1$ 、 $x-3$ 除之餘式分別為 -3 、 -1 、 -1 、 2 。
 則 $f(x)$ 被 $x(x+2)(x-1)(x-3)$ 除之餘式為
 $r(x) = ax(x-1)(x-3) + b(x+2)(x-1)(x-3) + c(x+2)x(x-3) + d(x+2)x(x-1)$ 。
 下列敘述哪些是正確的？
 (1) $a > 0$ (2) $b + c = 0$ (3) $c > d$ (4) $r(0) = f(0)$
 (5) $r(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式為 -7

8. 設多項式 $f(x)$ 分別除以 $x^2 + x - 2$ 、 $x^2 - x - 6$ 、 $x^2 + x - 12$ 所得餘式依次為 $2x + 3$ 、 $3x + a$ 、 $4x + b$ 。選出正確的選項：
 (1) $a = 5$ (2) $b = -2$
 (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $9x + 1$
 (4) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)(x+2)$ 的餘式為 $x^2 + 5x + 2$
 (5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-3)(x+4)$ 的餘式為
 $5 \cdot \frac{(x-3)(x+4)}{(1-3)(1+4)} + 14 \cdot \frac{(x-1)(x+4)}{(3-1)(3+4)} - 14 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(-4-1)(-4-3)}$ 。

試
數
學

9. 小瑛因工作業務需求，想要得知上週五升旗時間 7 點 40 分的溫度，於是到氣象局網站查詢資料，但氣象局資料只提供了如附表資訊：

| | | | |
|-------------------------------|----|-----|----|
| 時間 x (時) | 7 | 7.5 | 8 |
| 溫度 y ($^{\circ}\text{C}$) | 32 | 33 | 34 |

小瑛決定以多項式函數 $y = f(x)$ 來描述這筆資料。

並依此函數推測當日 7 點 40 分 (即 $x = \frac{23}{3}$) 的溫度，請選出正確的選項：

- (1) 滿足這 3 筆資料的多項式函數 $y = f(x)$ 有無限多個，其次數有可能是二次
- (2) 為便於計算，小瑛企圖尋求所有滿足此資料的多項式函數 $y = f(x)$ 中次數最低者，設此最低次的多項式為 $g(x)$ ，則 $g(x)$ 必為 $2x + 18$
- (3) 承(2)，如以拉格朗日 (Lagrange) 插值法求得滿足此筆資料的多項式函數為 $y = h(x)$ ，且 $h(x)$ 的次數不到三次，則 $h\left(\frac{23}{3}\right) = 33.\bar{3}$
- (4) 設 $r(x)$ 為 $f(x)$ 除以 $(x-7)(x-7.5)(x-8)$ 的餘式，則 $r(x)$ 亦為滿足此資料的多項式函數，其次數是二次
- (5) 承以上(1)~(4)選項， $g(x) = h(x) = r(x)$ 恆成立。

[中文中學測模]

10. 設 $f(x) = 2 \times \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + 4 \times \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + 6 \times \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$ ，

$g(x)$ 是一個實係數三次多項式。

且 $g(x)$ 除以 $(x-1)$ 、 $(x-2)$ 、 $(x-3)$ 的餘式分別為 2、4、6。

試問下列敘述哪些正確？

- (1) $f(4) = 8$ (2) $g(4) = 8$ (3) $g(x)$ 是 $f(x)$ 的倍式
- (4) $g(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $f(x)$
- (5) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$ ，則 $h(x) = 0$ 必有三個實根。

[2019 最新學測模]

11. 關於多項式 $f(x) = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2}x(x-1) - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}(x-1)(x-2) + \sqrt{2}x(x-2)$.

試選出正確的選項：

(1) $f(x)$ 的常數項為 $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (2) $f(x)$ 的各項係數總和為 $\sqrt{2}$

(3) $f(2) = \sqrt{2}-\sqrt{3}$ (4) $f(x)$ 是二次多項式 (5) $f(4) = \frac{f(3)+f(5)}{2}$.

【2019 最新學測模】

俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利