

# 俞克斌杯

## 的核心 100 for 2019 大學入試學測 (15) 一元二次方程式

### 【觀念核心】

1. 根與係數關係：

$$(1) \text{ 設 } ax^2 + bx + c = 0 \text{ 之二根為 } \alpha, \beta, \text{ 則 } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$* \text{ 以 } \alpha, \beta \text{ 為根之二次方程式為 } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

2. 根的性質判別：設  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R})$  之二根為  $\alpha, \beta$  且  $D = b^2 - 4ac$

(a) 有二實根  $\Leftrightarrow D \geq 0$

\*  $a, b, c \in \mathbb{Q}, D \geq 0$  且為完全平方數  $\Rightarrow$  有理根

(b) 有二等根  $\Leftrightarrow D = 0$

(c) 有二正根  $\Leftrightarrow D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$

(d) 有二負根  $\Leftrightarrow D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$

(e) 有一正根一負根  $\Leftrightarrow D > 0, \alpha\beta < 0$

(f) 二根均大於  $k \Leftrightarrow D \geq 0, (\alpha - k) + (\beta - k) > 0, (\alpha - k)(\beta - k) > 0$

(g) 二根均小於  $k \Leftrightarrow D \geq 0, (\alpha - k) + (\beta - k) < 0, (\alpha - k)(\beta - k) > 0$

(h) 一根大於  $k$ , 另一根小於  $k \Leftrightarrow D > 0, (\alpha - k)(\beta - k) < 0$

(i) 有二虛根  $\Leftrightarrow D < 0$

### 【鑑往核心】

1. 設  $a$  為實數，令  $\alpha, \beta$  為二次方程式  $x^2 + ax + (a-2) = 0$  的兩個根。  
試問當  $a$  為\_\_\_\_\_時， $|\alpha - \beta|$  有最小值？

[93 數乙]

答：2

解：根與係數關係：
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = a - 2 \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{(-a)^2 - 4(a-2)} = \sqrt{(a-2)^2 + 4}$$

當  $a = 2$  時，有最小值  $\sqrt{4} = 2$

2. 設  $k$  為一整數。若方程式  $kx^2 + 7x + 1 = 0$  有兩個相異實根，

且兩根的乘積介於  $\frac{5}{71}$  與  $\frac{6}{71}$  之間，則  $k =$ \_\_\_\_\_。

[92 學測]

答：12

$$\text{解：} \begin{cases} \text{判別式：} 7^2 - 4 \times k \times 1 > 0 \\ \text{兩根之積：} \frac{5}{71} < \frac{1}{k} < \frac{6}{71} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < \frac{49}{4} = 12.25 \\ \frac{71}{6} \approx 11.8\cdots < k < \frac{71}{5} = 14.2 \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 12$$

**【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】**

1. 若  $x^2 - 3x + 5 = 0$  之二根為  $\alpha, \beta$ ；求

(1)  $\alpha^2 + \beta^2$     (2)  $\alpha^3 + \beta^3$     (3)  $(\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha - 1)(\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta + 1)$

2.  $\alpha, \beta$  為  $2x^2 - 3x - 1 = 0$  的二根，求以  $\frac{\beta+1}{\alpha}, \frac{\alpha+1}{\beta}$  為二根之方程式？

俞克斌  
數學

3. 設  $\alpha \neq \beta$ ，且兩數分別滿足  $\alpha^2 - 2 = 5\alpha$ ， $\beta(5 - \beta) + 2 = 0$ ，則  $\left( \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{-5\alpha}{2 - \beta^2}} \right)^2 = ?$

- (1)  $-\frac{33}{2}$  (2)  $-\frac{25}{2}$  (3)  $\frac{33}{2}$  (4)  $\frac{25}{2}$  (5) 需考慮  $\alpha$ 、 $\beta$  的大小關係，無法確定。

[ 中文中學測模 ]

4.  $a$  為實數，若多項式  $f(x) = (x^2 + x + 2 - a)(x^2 - x + 2 + a)$  恰可以分解成三個相異的實係數質因式的乘積，則  $a$  的範圍為\_\_\_\_\_。(化為最簡分數) [ 全國模 ]

俞  
斌  
數  
學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利

5. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，若 $1+i$ 是方程式 $x^2 + ax - 4 = 0$ 的其中一根，則此方程式的另一根為何？  
(1) $2-2i$  (2) $-2+2i$  (3) $1-i$  (4) $-1+i$  (5) $1+2i$ 。

[2019 最新學測模]

6. 若方程式 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 的兩根為 $\alpha$ 與 $\beta$ ，則 $\alpha^3 + \beta^3$ 之值為何？  
(1)110 (2)80 (3)-50 (4)-80 (5)-110。

[2019 北區學測模①]

7. 已知 $\alpha$ 、 $\beta$ 為方程式 $x^2 - kx + 2 = 0$ 的兩相異實根，其中 $k$ 是實數；  
若二次函數 $f(x) = 4x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2$ 的圖形與 $x$ 軸恰有一個交點，  
則 $k^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[2019 最新學測模]

俞  
斌  
數  
學