俞克斌杯杯

的 核心 100 for 2019 大學入試學測

(16) 牛頓定理

【觀念核心】

1. 整係數多項式的一次因式檢查法：

(1) 牛頓定理：

設 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 為整係數多項式，

又 $\alpha,\beta\in Z$，$\alpha\neq 0$，$(\alpha,\beta)=1$，

則 $(\alpha x-\beta)\,|\,f(x)\ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\ \alpha|a_n$ 且 $\beta|a_0$

(2) $f(1)=0\Leftrightarrow(x-1)\,|\,f(x)$

$f(x)$ 之(奇次項係數和)＝(偶次項係數和)$\Leftrightarrow(x+1)\,|\,f(x)$

$f(x)$ 之各項係數均同號且 $\dfrac{b}{a}>0\Leftrightarrow(ax-b)\nmid f(x)$

完全式 $f(x)$ 之各項係數正負相間且 $\dfrac{b}{a}<0\Leftrightarrow(ax-b)\nmid f(x)$

$(ax-b)\,|\,f(x)\Rightarrow(a-b)\,|\,f(1)$，$(a+b)\,|\,f(-1)$

【鑑往核心】

1. 下列哪一個選項是方程式 $x^3-x^2+4x-4=0$ 的解？(註：$i=\sqrt{-1}$)
(1) $-2i$ (2) $-i$ (3) i (4) 2 (5) 4 [108 年學測]

答：(1)

解：原式 $=(x-1)\left(x^2+4\right)=0\quad\Rightarrow x=1,\pm 2i$

2. 設 a、b 均為正整數，
而方程式 $x^2-ax+15=0$ 與 $x^2-bx+3b-1=0$ 有一共同根，且此共同根為實數，
則 $b=$_________。 [101 數乙]

答：12

解：由牛頓定理知：可能實數根為3或5

若此公共實數根為3 $\Rightarrow$ 代入第二式：$9-3b+3b-1=0$，矛盾，不合

若此公共實數根為5 $\Rightarrow$ 代入第二式：$25-5b+3b-1=0$，故 $b=12$

代入第一式：$25-5a+15=0$，故 $a=8$

3. 若a為正整數且方程式$5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$的根都是有理根，則$a=$________。
【106 學測】

答：7

解：由牛頓定理，知可能的有理根為±1、$\pm\frac{1}{5}$

若$x=1 \Rightarrow 5+a+4+a+1=0 \xrightarrow{a\in N}$ 不合

若$x=-1 \Rightarrow -5+a+4-a+1=0 \Rightarrow 0=0$，合

若$x=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{25}+\frac{a+4}{25}+\frac{a}{5}+1=0 \xrightarrow{a\in N}$ 不合

若$x=-\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{25}+\frac{a+4}{25}-\frac{a}{5}+1=0 \xrightarrow{a\in N} a=7$，合

4. 下列哪一個選項是方程式$7x^5-2x^4+14x^3-4x^2+7x-2=0$的根？

(1) -1　(2) $\frac{1}{7}$　(3) $-\frac{1}{7}$　(4) $\frac{2}{7}$　(5) $-\frac{2}{7}$　【105 數乙】

答：(4)

解：原式$=x^4(7x-2)+2x^2(7x-2)+(7x-2)$

$=(7x-2)\left[x^4+2x^2+1\right]=(7x-2)\left[x^2+1\right]^2=0$

五根為：$\frac{2}{7}$、$\pm i$（重根）

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 方程式$6x^4+x^3+14x^2+31x-12=0$，在區間$(0,1)$，$(-2,-1)$各恰有一有理根，求有理根________。

2. 設a、$b\in R$，$ab=2$，$a^3+b^3=40$，試求$a+b$之值為________。 【台中區學測模】

3. $f(x)=2x^4+x^3-6x^2-2x+6$，$g(x)=2x^4-3x^3+2x-2$，
若$f(k)=3$，$g(k)=1$，求$k=$________。

4. 已知a為實數，$f(x)=2x^3-7x^2+7x$，$g(x)=2x^3+x^2-13x+8$，
若$f(a)\neq 2$且$g(a)=2$，則a之值為________。

5. 設整係數多項式$f(x)=x^3+(k-1)x^2+(3-k)x-3$，
若$y=f(x)$圖形恰與x軸交於一點$(p,0)$且p為有理數，則下列哪些是k的可能值？
(1) -4 (2) -2 (3) 1 (4) 3 (5) 5

6. 設$f(x)=6x^4+11x^3-15x^2+2$，試選出正確的選項：
(1)方程式$f(x)=0$沒有實根 (2)方程式$f(x)=0$有兩個實根和兩個虛根
(3)方程式$f(x)=0$沒有有理根 (4)方程式$f(x)=0$恰有一個有理根
(5)方程式$f(x)=0$恰有兩個相異有理根。

【2019 最新學測模】