# 俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測

## (17) 成雙定理

### 【觀念核心】

1. 多項式的共軛性質

設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$ 是實係數 $n$ 次多項式，$z$ 為複數，

則 $\overline{f(z)} = f\left(\bar{z}\right)$

2. 實係數方程式的虛根成對定理

設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0 = 0$ 是實係數 $n$ 次多項方程式，

若複數 $z=a+bi$ （$a,b$ 為實數）是 $f\left(x\right)=0$ 的一個虛根，

則 $\bar{z}=a-bi$ 也是 $f\left(x\right)=0$ 的一個虛根。

亦即 $f\left(x\right)=0$ 的虛根個數必為偶數．

3. 有理係數方程式的無理根成對定理

設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0 = 0$ 是有理係數 $n$ 次多項方程式，

若 $p+\sqrt{q}$ 是 $f\left(x\right)=0$ 的一個無理根，則 $p-\sqrt{q}$ 也是 $f\left(x\right)=0$ 的一個無理根。

但若 $p+\sqrt[3]{q}$ 是 $f\left(x\right)=0$ 的一個無理根，不能保證 $p-\sqrt[3]{q}$ 也是 $f\left(x\right)=0$ 的一個無理根。

### 【鑑往核心】

1. 設 $f\left(x\right)$ 為滿足下列條件的最低次實係數多項式：

$f\left(x\right)$ 最高次項的係數為 1，且 $3+2i$、$i$、5 皆為方程式 $f\left(x\right)=0$ 的解(其中 $i^2=-1$)。

則 $f\left(x\right)$ 之常數項為________ 【99 學測】

答：$-65$

解：$f\left(x\right)=\left(x-3+2i\right)\left(x-3-2i\right)\left(x-i\right)\left(x+i\right)\left(x-5\right)=\left[x^2-6x+13\right]\left[x^2+1\right]\left[x-5\right]$

$$=\left[x^2-6x+13\right]\left[x^3-5x^2+x-5\right]=x^5-11x^4+34x^3-76x^2+43x-65$$

2. 設 $f\left(x\right)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f\left(i\right)=0$(其中 $i^2=-1$)。

請問下列哪些選項是多項式方程式 $f\left(x\right)=0$ 的根？

(1) $-i$　(2) 0　(3) 1　(4) $-5$　(5) 5 【101 學測】

答：(1)(2)(5)

解：實係數多項方程式 ⇒ 虛根成雙 ⇒ $f\left(i\right)=0$，$f\left(-i\right)=0$

$\Rightarrow f(x)$有$(x+i)(x-i)$之因式$\Rightarrow f(x)$有$x^2+1$因式

故$f(x)=(x^2+1)(x^2-5x)=x(x-5)(x^2+1)$

$\Rightarrow f(x)=0$之根為$x=0$、$5$、$\pm i$，故選(1)(2)(5)

3. 設$f(x)$是首項係數為1的實係數二次多項式。請選出正確的選項：
(1)若$f(2)=0$，則$x-2$可整除$f(x)$　(2)若$f(2)=0$，則$f(x)$為整係數多項式
(3)若$f(\sqrt{2})=0$，則$f(-\sqrt{2})=0$　(4)若$f(2i)=0$，則$f(-2i)=0$
(5)若$f(2i)=0$，則$f(x)$為整係數多項式。【104學測】

答：(1)(4)(5)

解：(2) 無法確定（反例：$f(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})$或$f(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$）

(3) 必須有理係數才成立

4. 假設$a$，$b$是整數，且$b\neq 0$。已知$c=\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$是實係數一元二次方程式$x^2+kx+1=0$的一個解。請問下列哪些選項是正確的？
(1)$\frac{1}{c}$是上述方程式的另外一個解　(2)$\frac{1}{c}=\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$　(3)$c+\frac{1}{c}=k$
(4)$k$ 一定是整數　(5)$a$ 一定是奇數　【96數乙】

答：(1)(2)(5)

解：$\because x^2+kx+1=0$為實係數，且$c=\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i$為其一根

由「成雙定理」得知：$\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i$亦為其根，

又由「根與係數關係」知：

①兩根之積$=1\Rightarrow$一根$c$，另一根$\frac{1}{c}$　②兩根之和$=-k\Rightarrow c+\frac{1}{c}=-k$

③兩根之積：$\left(\frac{a}{3}+\frac{b\sqrt{2}}{3}i\right)\left(\frac{a}{3}-\frac{b\sqrt{2}}{3}i\right)=1\Rightarrow a^2+2b^2=9$

$\because a$、$b$為整數且$2b^2$為偶數，$b\neq 0$

$\therefore a^2$為奇數$\Rightarrow a$為奇數$\Rightarrow a=\pm 1$、$b=\pm 2\Rightarrow k=\frac{2a}{3}\notin Z$

1. 設 $f(x)=2x^4+ax^3+bx^2+cx-15$，其中 $a$、$b$、$c$ 為整數，若 $f(x)=0$ 有虛根 $2+i$，及一正有理根 $\frac{q}{p}$(其中 $p,q\in N$ 且 $p$、$q$ 互質)，又已知 $f(2)<0$，則此正有理根 $\frac{q}{p}=$________。

2. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。試問下列哪些敘述是正確的?
(1) $f(1-i)=0$
(2) $f(2+i)\neq 0$
(3) $f(2+i)+f(2-i)$ 的值必為實數
(4) 沒有實數 $x$ 滿足 $f(x)=x$
(5) 若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$

3. 若$f(x)$為實係數多項式，已知$1+i\log_3 2$為方程式$f(x)=0$之一根（$i=\sqrt{-1}$），則下列哪些必為方程式$f(x)=0$之根？

(1)$1+i\log_2 3$　(2)$1+i\log_3\frac{1}{2}$　(3)$1+i\log_{\frac{1}{3}} 2$　(4)$1+i\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$　(5)$1+i\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}$。

【台中區學測模】

4. $i=\sqrt{-1}$，已知$f(x)=(x-2-i)(x-p)(x-q)$為一整係數多項式，請選出正確的選項。

(1) 方程式$f(x)=0$恰有一實根　(2) 方程式$f(x)=0$有一根為$2-i$

(3) $f(x)$的常數項為5的倍數　(4) $p+q$為實數

(5) $(2+i)(p+q)+pq$為實數

【學測模】

5. 設$a$、$b$為實數，令$f(x)=x^3+ax^2+bx+4$，且$f(1+i)=0$，則$f(x)=0$的實根為何？

(1)4　(2)2　(3)1　(4)$-1$　(5)$-2$。

【2019 最新學測模】

6. $a$、$b$是實數且多項式$f(x)=2x^4-9x^3+ax^2-19x+b$，已知$f(2i+1)=0$，
請選出正確的選項：
(1)$f(2i-1)=0$　(2)$a=23$　(3)$b=-15$　(4)$y=f(x)$的圖形與$x$軸有2個相異交點
(5)滿足不等式$f(x)<0$的整數解共有3個。

【2019 中區學測模】

7. 設$f(x)=ax^3+bx+c$，其中$a$、$b$、$c$為有理數，若$f(2-i)=0$，
則下列哪些選項正確？
(1)$ab<0$　(2)$ac<0$　(3)若$a>0$，則$f(-3)>0$　(4)若$a$是整數，則$c$也是整數
(5)若$b$是整數，則$c$也是整數。

【2019 最新學測模】

8. 給定一個實係數三次多項式$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$，試選出正確的選項：

(1)存在實數$\alpha$，使得$f(\alpha)=1000$

(2)若$f(1)=f(1-i)=0$，則$b=-3$

(3)若$f(1)=0$，且$b$、$c$、$d$為整數，則$\dfrac{1+i}{2}$可能為$f(x)=0$的解

(4)$y=f(x)$的圖形可能同時通過$(0,1)$、$(1,2)$、$(2,3)$三點

(5)$y=f(x)$的圖形可能同時通過$(0,1)$、$(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$四點。

[2019 最新學測模]

9. 下列有關多項式的敘述，試選出正確的選項：

(1)設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$為整係數多項式，
若$ax-b$為$f(x)$的一次因式，則$a$為$a_n$的因數且$b$為$a_0$的因數

(2)設$f(x)$為整係數多項式，若$f(x)$可被一次整係數多項式$ax+b$整除，
則其商式亦為整係數多項式

(3)設$f(x)$為有理係數多項式，且$f(a+\sqrt{b})=0$，則$f(a-\sqrt{b})=0$

(4)設$f(x)$為實係數多項式，且$f(2+i)=0$，則$f(2-i)=0$

(5)設$f(x)$為實係數多項式，且$Z$為虛數，若$f(x)$可被$x-Z$整除，
則$f(x)$亦可被$(x-Z)(x-\overline{Z})$整除（$\overline{Z}$為$Z$的共軛複數）。

[2019 最新學測模]