俞克斌杯杯

的核心100 for 2019大學入試學測

(18) 韋達定理

【觀念核心】

1. 韋達定理：

(1) 設 α,β,γ 為 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根，則

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}，\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a}，\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

(2) 設 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 為 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根，則

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{-b}{a}，\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=\frac{-d}{a}，\alpha\beta\gamma\delta=\frac{e}{a}$$

2. 根的變換：

(1) 倒根變換：以 $f(x)=0$ 各根之倒數為根之方程式為 $f(\frac{1}{x})=0$

(2) 負根變換：以 $f(x)=0$ 各根之相反數為根之方程式為 $f(-x)=0$

(3) 倍根變換：以 $f(x)=0$ 各根之 k 倍 $(k\neq 0)$ 為根之方程式為 $f(\frac{x}{k})=0$

(4) 減根變換：以 $f(x)=0$ 各根減去 k 為根之方程式為 $f(x+k)=0$

3. 重根定理：

$$(x-a)^k \mid f(x) \Leftrightarrow f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0，f^{(k)}(a)\neq 0$$

【鑑往核心】

1. 以方程式 $x^3-7x+6=0$ 三根 α,β,γ 之平方為根，得一新方程式 $x^3+\ell x^2+mx+n=0$，試求 $(\ell,m,n)=$ ________。 【71 日自】

答：$(\ell,m,n)=(-14,49,-36)$

解：由根與係數可知：$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7\\ \alpha\beta\gamma=-6\end{cases}$

$$故\begin{cases}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=14\\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=49\\ \alpha^2\beta^2\gamma^2=36\end{cases}$$

$\therefore$所求之新方程式為$x^3-14x^2+49x-36=0$

$\therefore(\ell,m,n)=(-14,49,-36)$

2. 設方程式$x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$有四個相異有理根，則其最大根為________。 [86 日社]

答：2

解：利用「牛頓定理（有理根鑑定法）」：可能之有理根為±1、±2、±5、±10

又x^3的係數為 3 $\Rightarrow$ 故『四根之和為-3』

常數項為 10 $\Rightarrow$ 故『四根之積為 10』

應為$+1$、-1、$+2$、-5 $\Rightarrow$ 故最大根 2

3. 假設整係數方程式$x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$有四個相異的正有理根，則四根之和為________。[90 日自]

答：12

解：利用「牛頓定理（有理根鑑定法）」：

可能之正有理根為 1、2、4、5、8、10、20、40

又常數項為 40 $\Rightarrow$ 故『四根之積為 40』

應為 1、2、4、5 $\Rightarrow$ 四根之和為 12

5. 設α、β、γ為方程式$3x^3-6x^2+\left(k^2-1\right)x+k=0$的三根，若$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$，則$k=$________。 [84 大學聯考]

答：$k=1$ 或$-\dfrac{3}{2}$

解：由根與係數知$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{k^2-1}{3}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{k}{3}\end{cases}$

由$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$

$\Rightarrow 2^3-3(2)\left(\dfrac{k^2-1}{3}\right)+3\left(-\dfrac{k}{3}\right)=7$

$\Rightarrow 2k^2+k-3=0 \Rightarrow (k-1)(2k+3)=0 \Rightarrow k=1$ 或$-\dfrac{3}{2}$

6. 設a,b,c三數滿足$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12 \\ a^3+b^3+c^3=28 \end{cases}$，

令$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$。

若將$f(x)$表成$x^3+\ell x^2+mx+n$，則$n=$ ________ 。 【77日自】

答：4；

解：由根與係數$\begin{cases} l=-(a+b+c) \\ m=ab+bc+ca \\ n=-abc \end{cases}$

又$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow\ ab+bc+ca=\dfrac{16-12}{2}=2$

又$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow\ abc=\dfrac{4^3-3\times4\times2}{-3}=-4$，故$\begin{cases} l=-4 \\ m=2 \\ n=4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=x^3-4x^2+2x+4$

【知來核心（含108學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設a、b、c、$d\in R$，$d\neq0$，

若方程式$x^4-4x^3+ax^2+bx+10=0$有兩根$c+di$及$c+2di$，求$a+b=$ ________ 。

2. 設a、b為實數，若已知方程式$x^3+ax+b=0$之一根為$1+i$，則$\dfrac{a}{b}$滿足：

(1) $\dfrac{a}{b}\le -1$　2) $-1<\dfrac{a}{b}\le -\dfrac{1}{2}$　(3) $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}\le 0$　(4) $0<\dfrac{a}{b}\le \dfrac{1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}\le 1$

3. 設α、β、γ互異且$4\alpha^3-2\alpha+1=0$，$4\beta^3-2\beta+1=0$，$4\gamma^3-2\gamma+1=0$，則$(\alpha+\beta-3\gamma)(\beta+\gamma-3\alpha)(\gamma+\alpha-3\beta)=$？

4. 已知x_1,x_2,x_3,x_4分別為$x^4-5x^3+mx^2+nx+8=0$的四根，且$x_1+x_2=3$，$x_3\cdot x_4=2$，則$(m,n)=$________。

5. 令 $f(x)=2x^3-x^2-14x+5$，設 a、b、c 三個相異數且函數

$$g(x)=2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$，

若 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$，則 abc 之值為________。（化至最簡）

【中一中學測模擬考】

6. 若 a 為正整數且方程式 $7x^3+(3a-11)x^2-\left(a^2-9\right)x-1=0$ 的根皆為有理根，則 a 值為________。

【2017 最新學測模】