俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測

(19) 勘根定理

【觀念核心】

1. 勘根定理

   設 $f(x)=0$ 是一個實係數多項式方程式，a,b 是兩個相異實數，
   若 $f(a)f(b)<0$（即函數值 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號），
   則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少有一個實根
   （即在 a,b 之間存在一個實數 c，使得 $f(c)=0$）。

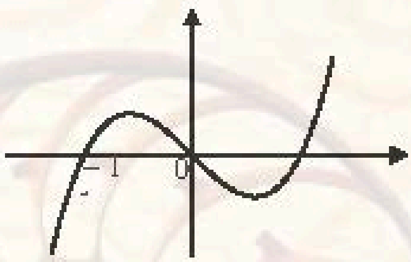
2. 注意：在勘根定理中，

   (1)若 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有奇數個（1個或3個……）實根。
   (2)若 $f(a)f(b)>0$，則 $f(x)=0$ 在 a,b 之間有偶數個（0個或2個……）實根。

3. 設 $a>0$，$n\in N$，則方程式 $x^n=a$ 恰有一正實根

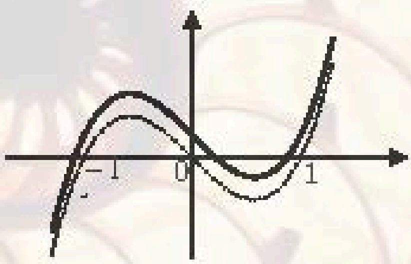
【鑑往核心】

1. 已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 之圖形如右圖所示。
   今考慮 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$，
   則方程式 $f(x)=0$：
   (A) 有三個實根
   (B) 當 $x<-1$ 時，恰有一實根
   　(有一實根且僅有一實根)
   (C) 當 $-1<x<0$ 時，恰有一實根
   (D) 當 $0<x<1$ 時，恰有一實根
   (E) 當 $1<x$ 時，恰有一實根。 [88日自]



答：(A)(B)

解：$f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$ 的圖形如右粗線
看圖說話可知選(A)(B)



2. 給定三次方程式 $(x-4)(x-6)(x-8)+(x-5)(x-7)(x-9)=0$
   試問下列哪兩個正整數之間有這方程式的實根？
   (1) 4 與 5 之間　(2) 5 與 6 之間　(3) 6 與 7 之間　(4) 7 與 8 之間
   (5) 8 與 9 之間 [93指考乙離]

答：(1)(3)(5)

解：令 $f(x)=(x-4)(x-6)(x-8)+(x-5)(x-7)(x-9)$

$f(4)=-15$；$f(5)=3$；$f(6)=3$；$f(7)=-3$；$f(8)=-3$；$f(9)=15$

$\because f(4)f(5)<0$、$f(6)f(7)<0$、$f(8)f(9)<0$

$\therefore$由勘根定理可知在 4 與 5 之間、6 與 7 之間、8 與 9 之間有實根

3. 三次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ 在下列那些連續整數之間有根？
(1) -2 與 -1 之間 (2) -1 與 0 之間 (3) 0 與 1 之間 (4) 1 與 2 之間 (5) 2 與 3 之間。
[88 學測]

答：(1)(2)(4)

解：(1) $f(-2)f(-1)<0$

(2) $f(-1)f(0)<0$

(3) $f(0)f(1)>0$

(4) $f(1)f(2)<0$

(5) $f(2)f(3)>0$

故由勘根定理知在 -2 與 -1、-1 與 0 之間、1 與 2 之間有根

4. 方程式 $x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$ 在下列哪兩個整數之間有實數根？
(A) -3 與 -2 之間　(B) -2 與 -1 之間
(C) -1 與 0 間　(D) 0 與 1 之間
(E) 1 與 2 之間。
[91 數乙]

答：(D)

解：$\because$ 由勘根定理知：

若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則 $x=a$ 與 $x=b$ 之間至少存在一實根

$\therefore$ $f(0)\cdot f(1)<0$，故可知在 $x=0$ 與 $x=1$ 之間有實根。

5. 設 $f(x)=x^4-3x^3-16x^2+3x+35$，試問 $y=f(x)$ 的圖形在下面那個範圍中與 x 軸相交。
(A) $-1<x<0$　(B) $0<x<1$　(C) $1<x<2$　(D) $2<x<3$　(E) $3<x<4$
[85 大學聯考]

答：(C)

解：$f(-1)=+20$、$f(0)=+35$、$f(1)=+20$、$f(2)=-31$、$f(3)=-100$

$f(4)=-\cdots\cdots$

由勘根定理知：若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則 $x=a$ 與 $x=b$ 之間至少存在一實根

6. 關於三次多項式 $f(x)=x^3-6x^2+1$，試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $f(x)=0$ 有實根落在 0 與 1 之間；(2) $f(x)=0$ 有實根大於 1；
(3) $f(x)=0$ 有實根小於 -1；(4) $f(x)=0$ 有實根也有虛根；
(5) $f(x)=10$ 有實數解。
[92 學測]

答：(1)(2)(5)

解：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

$\therefore$ 方程式 $f(x)=0$ 在 $(-1,0)$ 及 $(0,1)$ 及 $(5,6)$ 處有實根

(E) $f(x)=x^3-6x^2+1$ 在 $x=6$ 後皆為正數，故 $f(x)=10$ 有實數解

7. 設 x 為一正實數且滿足 $x\cdot 3^x=3^{18}$；若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=$ ________ 。 [94 學測]

答：15

解：令 $f(x)=x\cdot 3^x-3^{18}$

由勘根定理知：$f(15)=15\cdot 3^{15}-3^{18}=5\cdot 3^{16}-3^2\cdot 3^{16}=-4\cdot 3^{16}<0$

$f(16)=16\cdot 3^{16}-3^{18}=16\cdot 3^{16}-3^2\cdot 3^{16}=7\cdot 3^{16}>0$

$\therefore$ 在 15 與 16 之間有根　$\therefore k=15$

8. 已知三次方程式 $4x^3-20x^2-29x-25=0$ 在兩個連續正整數 n 與 $n+1$ 之間有一個根，那麼 $n=$ ________。 [78.日社]

答：6

解：$f(x)=4x^3-20x^2-29x-25$

$f(1)=-70<0$；$f(2)=-131<0$；$f(3)=-184<0$；$f(4)=-205<0$

$f(5)=-170<0$；$f(6)=-55<0$；$f(7)=164>0$

由勘根定理知 $x=6$ 與 $x=7$ 之間有一根，故 n 取 6 ………答

9. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ $(i=\sqrt{-1})$，則函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點？
(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)因 $f(x)$ 的不同而異。 [85 學測]

答：(B)

解：因為 $f(x)$ 為『實』係數多項式，且 $f(i)=0$，故必有另一根為 $-i$

因為 $f(x)$ 為三次，故第三根必為『實』根。

所謂的『實根』就是與『x 軸』的『交點』，故與 x 軸有 1 個交點

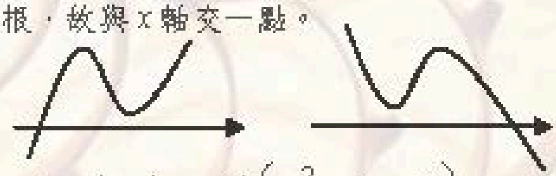
10. 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式，且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。試問下列哪些敘述是正確的？
(1) $f(1-i)=0$　(2) $f(2+i)\neq 0$　(3)沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$
(4)沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$　(5)若 $f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，則 $f(4)<0$ [93 學測]

答：(1)(2)(5)

解：$\because f(x)$ 為實係數多項式，有一根 $1+i$，故必有另一根為 $1-i$，故選(1)(2)

$\because f(x)$ 為三次，故第三根為實根，故與 x 軸交一點。

故其圖形可能如右：



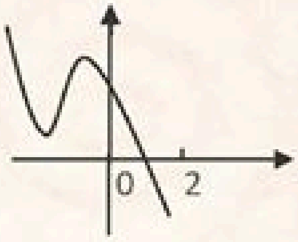
可令 $f(x)=(ax+b)(x-1-i)(x-1+i)=(ax+b)(x^2-2x+2)$

(3)(4)當 $a=1$，$b=0$ 時，即 $f(x)=x\left(x^2-2x+2\right)$，皆可存在 $x=0$

滿足 $f(x)=x$，$f\left(x^3\right)=0$

(5) $\because f(0)>0$ 且 $f(2)<0$，故由勘根定理可知

在 0 與 2 之間有一實根，故圖形如右，故 $f(4)<0$



11. 設 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，請問下列哪些選項是正確的?

(1) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$　　(2) $f(x)=2$ 有整數解

(3) $f(x)=x^2+1$ 有實數解　　(4) $f(x)=x$ 有不等於零的有理數解

(5)若 $f(a)=2$，則 $f(-a)=2$　　【100 學測】

答：(3)

解：(1) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=(+)(-)(+)<0$

(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)=2 \Rightarrow x^3-x-2=0$
由牛頓定理知，可能的有理根（整數根）為±1、±2，代回原式均不合，
故無整數根

(3) $f(x)=x(x-1)(x+1)=x^2+1 \Rightarrow x^3-x^2-x-1=0$
由成雙定理、勘根定理知，奇數次方至少一實根

(4) $f(x)=x(x-1)(x+1)=x \Rightarrow x^3-2x=0$，三根為 0、$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$

(5) $f(a)=a(a-1)(a+1)=2$，$f(-a)=-a(-a-1)(-a+1)=-2$

12. 設 a、b、c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$。
請選出正確的選項。

(1) $f(x)=0$ 無正根　　(2) $f(x)=0$ 一定有實根

(3) $f(x)=0$ 一定有虛根　　(4) $f(1)+f(-1)$ 的值是偶數

(5) 若 $a+c>b+3$，則 $f(x)=0$ 有一根介於 -1 與 0 之間　　【105 學測】

答：(1)(4)(5)

解：(1) $x>0$ 時，$f(x)>0$ 恆成立

(2) 反例：$f(x)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+2\right)$，四根均為虛根

(3) 反例：$f(x)=(x+1)^3(x+2)$，四根均為實根

(4) $f(1)+f(-1)=2+2b+4$ 的值是偶數

(5) 若 $a+c>b+3$，則 $f(-1)=-a+b-c+3<0$，$f(0)=2>0$
故 $f(x)=0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

13. 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。
若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，
試問下列哪些選項是正確的？

(1)$P(x)=0$與$Q(x)=0$有共同的實根
(2) 3 是$P(x)=2$唯一的實根
(3)$P(x)$不能被$x-4$整除
(4) $P(x)=0$一定有小於 3 的實根
(5) $P(x)$除以$(x-3)(x+3)$的餘式也是 2 [96 數甲]

答：(3)(4)

解：(1)不妨令$P(x)=(x-3)\left[ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right]+2$，

其中$Q(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$係數均為正，
若$P(x)=0$與$Q(x)=0$存在共同實根，
則必$P(x)$與$Q(x)$存在「一次公因式$d(x)$」，
由線性組合知：$d(x)\,|\,P(x)-(x-3)Q(x)$

$\Rightarrow d(x)\,|\,2$顯然與一次公因式矛盾。

(2)不妨令$P(x)=(x-3)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2$
顯然$x=3$、-1、-2、-3、-4均為$P(x)-2=0$之根，
故$x=3$並非唯一根。

(3)當$x\geq 3$，$P(x)$恆正，由「勘根定理」知：
$x\geq 3$的範圍中，$P(x)=0$並無實根，
即$P(x)$不存在$(x-a)$，$a\geq 3$之因式，
故$P(x)$不能被$(x-4)$整除。

(4)由「代數基本定理」及「成雙定理」知：
$P(x)=0$至多存在4個複根，故第5根必為實根，
承(3)知，此實根必小於3。

(5)不能確定。

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 若$f(x)$與$g(x)$皆為實係數三次多項式，且$f(x)=0$與$g(x)=0$有共同虛根，已知$f(1)=-6$，$g(1)=-3$，則下列敘述何者正確？
(1) $f(x)$與$g(x)$的最高公因式為二次式　(2) $f(x^3)=0$必有實根
(3) $f(2^x)=-6$有實根　(4) $[g(x)]^3-2f(x)$除以$x-1$的餘式為-15
(5) 若$2xg(x)-f(x)=0$恰有二虛根

2. 設$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$為整係數多項式，已知$f(x)=0$的三根皆為有理數，且$f(\sqrt{8})<0$，$f(\sqrt{12})>0$，$f(\sqrt{20})<0$，$f(2\sqrt{7})>0$，則d之值為？
(1) 15　(2) 24　(3) -24　(4) -60　(5) 72

3. 若$k\in Z$，$f(x)=3x^3+10x^2+5x-1$，
則滿足$\dfrac{|f(k)|}{f(k)}+\dfrac{|f(k+1)|}{f(k+1)}=0$所有可能的$k$值為________。

4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數且 $f(2)=3$，$f(5)=-8$，$f(9)=6$，
則下列哪些選項是正確的？
(1)至少有一個實數 α 滿足 $2<\alpha<5$，使得 $f(\alpha)=0$
(2)至少有一個實數 α 滿足 $2<\alpha<5$，使得 $f(\alpha)=6$
(3)至少有一個實數 α 滿足 $2<\alpha<5$，使得 $f(\alpha)=\alpha$
(4)至少有一個實數 α 滿足 $2<\alpha<9$，使得 $f(\alpha)=0$
(5)至少有一個實數 α 滿足 $2<\alpha<3$，使得 $f\left(\alpha^2\right)=0$。 【全國模(甲)】

5. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為整數，
若 $f(-1)=6$，$f(1)=-4$，且 $f(x)=0$ 的三根均為有理根，請選出正確的選項。
(1) $f(x)=0$ 至少有一根介於 -1 與 1 之間
(2) $f(x)=0$ 的三根必為整數
(3) $c=0$
(4) a、b 之值無法確定 【全國】

6. 若a、b、c、d為滿足方程式$x^4-7x^2+x+2=0$的解，請選出正確的選項。

(1) a、b、c、d為四實根

(2) a、b、c、d為兩實根兩虛根

(3) 當$-3\le x\le 0$，則$x^4-7x^2+x+2=0$無實根

(4) 若$f(x)$是領導係數為1的四次多項次且滿足$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=-1$，則$f(x)=0$有兩實根兩虛根

(5) 若$f(x)$是領導係數為1的四次多項次且滿足$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=-1$，則當$1\le x\le 2$，$f(x)$恆為負　【全國學測模】

7. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中a、b、c、d是整數且$f(1+i)=0$，下列敘述哪些是正確的？

(1)$f(1-i)=0$

(2)若$f(x)=0$有一有理根α，則此有理根α必為整數

(3)若$f(1)=f(2)=0$，則對所有實數x，$f(x)$恆大於0

(4)若$f(1)=18$、$f(2)=-6$，則$f(x)=0$必有兩相異實根

(5)若$f(1)=18$、$f(2)=-6$，則$f(0)>0$。　【中一中學測模】

8. 方程式$3x^3+9x^2+4x-1=0$在下列哪些連續整數之間有實根？
(1)-3和-2 (2)-2和-1 (3)-1和0 (4)0和1 (5)1和2。

[2019 最新學測模]

9. 若整係數多項式$f(x)=2x^3+ax^2+bx+10$滿足$f(1)=0$，$f(-3)\cdot f(-2)<0$，且方程式$f(x)=0$的三根均為有理數，則$b-a=$________。

[2019 北區學測模①]

10. 已知$f(x)$為整係數四次多項式，且最高次項的係數為1，若方程式$f(x)=0$的實根均為有理數，且$f(1+2i)=0$，$f(\sqrt{3})>0$，$f(\sqrt{5})<0$，$f(\sqrt{10})>0$，其中$i=\sqrt{-1}$，則$f(x)$的常數項為________。

[2019 最新學測模]

11. 已知三次實係數多項式$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}-3\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

$$+7\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$，下列哪些選項正確？

(1)$f(1)=7$　(2)$a>0$　(3)$b+c=-38$　(4)$8a+b=1$

(5)方程式$f(x)=0$有三個相異實根。

【2019 最新學測模】

12. 19世紀起，日本的數學家會在寺廟留下自己精心設計的考題，供人挑戰演練，這類寫有題目的木板稱為「算額」。前來挑戰解答的師生也會留下更簡易的解答方法，互相切磋。小波到日本旅遊時參觀了桐生市天滿宮，該寺廟流傳一道「算額」，小波挑戰後發現答案x是方程式$8x^3-8\sqrt{2}x^2+5x-12+8\sqrt{2}=0$的其中一個根，為了求出此根，他令$f(x)=8x^3-8\sqrt{2}x^2+5x-12+8\sqrt{2}$，並計算$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$數值的正負，如附表，試選出正確的選項：

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$		$-$		$-$	

(1)$f(0)>0$　(2)$f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)>0$

(3)$f(x)=0$在$\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$沒有實根

(4)$f(x)=0$在$\frac{1}{2}\le x\le 1$只有一實根　(5)$f(x)=0$沒有負實根。

【2019 最新學測模】