

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (23) 指數運算律

【觀念核心】

1. 定義：

對於任何一個實數 a 及自然數 n ， a 自乘 n 次表示為 $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個 } a}$ 。

a^n 讀做 a 的 n 次方，其中 a 稱為底數， n 稱為指數。

2. 整數指數：

(1) 零指數：對任何 $a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$ ； 0^0 無定義。

(2) 負指數：對任何 $a \neq 0 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ ；而 0^{-n} 不存在。

3. 有理數指數：

若 $a > 0$ 且 m 為整數， n 為正整數，則 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 。

4. 指數律：

(1) 若 $x > 0$ ，且 x 為有理數，則 $0^x = 0$ 。

(2) 指數 x 不是整數時，我們不討論底數 $a < 0$ 的情況。

(3) 排除上述無定義、不存在或不討論的情況之後，

指數計算對所有的實數 a, b, x 和 y 符合以下規律：

① 指數加法律： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

② 指數乘法律： $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

③ 指數分配律： $(ab)^m = a^m b^m$ 、 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ 。

【鑑往核心】

1. 試問共有多少組正整數 (k, m, n) 滿足 $2^k 4^m 8^n = 512$ ？

(1) 1 組 (2) 2 組 (3) 3 組 (4) 4 組 (5) 0 組

[108 年學測]

答：(3)

解： $2^{k+2m+3n} = 2^9$ ， $k, m, n \in \mathbb{N}$

$(k, m, n) = (1, 1, 2)$ 、 $(2, 2, 1)$ 、 $(4, 1, 1)$ 共三組

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。

當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。
試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

(1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81。

【106 學測】

答：(3)

解：由題意知 $\left[\left(b^2 \right)^2 \right]^2 = 81^3 \Rightarrow b^8 = 3^{12} \Rightarrow b = 3^{\frac{12}{8}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} \approx 5.196$

3. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。

鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？

(1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時 【105 學測】

答：(1)

解：
$$\begin{cases} m = 2k \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{120}{7.5}} \\ m = k \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{120}{T_B}} \end{cases} \xrightarrow{\text{相除}} 1 = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{120}{7.5} - \frac{120}{T_B}} \Rightarrow \frac{120}{7.5} - \frac{120}{T_B} = 1 \Rightarrow T_B = 8$$

4. 座標平面上滿足 $10^x \cdot 100^y = 1000$ 的所有點 (x, y) 所形成的圖形為下列哪個選項？

(1) 一個點 (2) 一直線 (3) 兩直線 (4) 一個二次多項式的函數圖形 (5) 一個圓

【103 數乙】

答：(2)

解： $10^{x+2y} = 10^3 \Rightarrow x+2y=3$

5. 當 (x, y) 在直線 $2x+y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，

試問下列哪個選項是正確的？

(1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$ (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
(3) K 沒有最大值、但有最小值 12 (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
(5) K 沒有最大值也沒有最小值。

【101 數甲】

答：(4)

解： $K = 9^x + 3^{3-2x} = 9^x + \frac{27}{9^x} \geq 2\sqrt{9^x \times \frac{27}{9^x}} = 6\sqrt{3}$

6. 考慮 x, y, z 的方程組
$$\begin{cases} 2^x - 3^y + 5^z = -1 \\ 2^{x+1} + 3^y - 5^z = 4 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} + a5^z = 8 \end{cases}$$
，其中 a 為實數。請選出正確的選項：

- (1) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $x=0$
 (2) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y>0$
 (3) 若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y<z$
 (4) 當 $a \neq -3$ 時，恰有一組 (x, y, z) 滿足此方程組
 (5) 當 $a \neq -3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x, y, z) 會在一條直線上

【103 數甲】

答：(1)(2)

解：原式：
$$\begin{cases} (2^x) - (3^y) + (5^z) = -1 \\ 2(2^x) + (3^y) - (5^z) = 4 \\ 2(2^x) + 3(3^y) + a(5^z) = 8 \end{cases}$$

(1) 由第一、二式知 $(2^x) + 2(2^x) = 3 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x=0$

(2) 故 $(3^y) - (5^z) = 2 \Rightarrow 3^y = 5^z + 2 > 1 = 3^0 \Rightarrow y > 0$

(3) 反例：當 $z=0$ 時， $y=1 > 0$ ，此時 $y > z$

(4) 由第二、三式知
$$\begin{cases} (3^y) - (5^z) = 2 \\ 3(3^y) + a(5^z) = 6 \end{cases} \Rightarrow (a+3)5^z = 0$$

若 $a \neq -3$ ，則 $5^z = 0$ ，顯然矛盾，無解

(5) 若 $a = -3$ ，則 $3^y - 5^z = 2$ 恆成立，但 y, z 非線性關係

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 一包雷根糖中有數種不同口味的糖果（如榴槤味、嘔吐味、臭雞蛋味、……）各一顆，包裝袋上寫著：「同時吃下不同種類的糖都是一種全新感受，總共可以產生 2000 多種驚奇口味喔！」（例如：榴槤味加嘔吐味、嘔吐味加臭雞蛋味、榴槤味加臭雞蛋味、榴槤味加嘔吐味加臭雞蛋味……等），則一包雷根糖中有_____種不同口味的糖果。

【2019 北區學測模】

2. 若 A 為 $y = 2^x$ 上一點， B 、 C 為 $y = 2^{x-3}$ 上相異兩點，已知 \overline{AB} 平行 x 軸， \overline{AC} 平行 y 軸，且 $\triangle ABC$ 的面積為 21，則 B 點坐標為_____。

[2019 最新學測模]

3. 設正整數 m 、 n 滿足 $2^m \times 4^n = 1024$ ，則 $m \times n$ 的最大值為下列何者？

- (1) $\frac{25}{2}$ (2) 12 (3) $\frac{23}{2}$ (4) 10 (5) 8。

[2019 最新學測模]

4. 世界各國發現亞洲某城市在過去四年的經濟活動蓬勃發展，因此特別觀察研究此城市的經濟成長率，想要作為將來國家努力的參考，而這四年的經濟成長率依序為 50%、50%、92%、143%。試求這四年來該城市的平均經濟成長率最接近下列哪個選項？

- (1) 80% (2) 81% (3) 82% (4) 83% (5) 84%。

[2019 最新學測模]

5. 設 x 、 y 為實數，且 $3x+y=4$ ，則 $(0.125)^x + (0.5)^y$ 的最小值為_____。
(化為最簡分數)

[2019 最新學測模]

6. 設 $a > 0$ 、 $b > 0$ ，已知 $(x, y) = (1, -2)$ 與 $(x, y) = (-2, 1)$ 都是方程式 $a^x b^y = 2$ 的解，
則下列選項中哪些 (x, y) 也是方程 $a^x b^y = 2$ 的解？
(1) $(x, y) = (\log 2, -\log 20)$ (2) $(x, y) = (3, -4)$ (3) $(x, y) = (0, 1)$
(4) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$ (5) $(x, y) = (-99, 100)$ 。

[2019 最新學測模]

7. 設 $f(x) = 101(x^5 + x^3 + x)$ ，若 $f(a) = 2012$ ，求 $f(-a) = ?$
(1) $\frac{1}{2012}$ (2) $-\frac{1}{2012}$ (3) 2012 (4) -2012 (5) 無意義。

8. 設實數 x 、 y 滿足 $19^x = 8 \cdot 152^y = 16$ ，則 $\frac{3y-4x}{xy}$ 的值 = _____。 [中一中學測模]

9. 一般而言，玩樂時間過長，自然會影響到讀書時間，也會影響到成績的表現。根據以往的經驗，如果平均每星期花 x 小時研讀數學，

則該科段考成績是 $y = \frac{10^{2x-6}}{10+10^{2x-6}} \times 100$ (分)。

試問：老王平均每星期要花 _____ (小時) 研究數學，才能在段考中至少 80 分。(四捨五入至小數點第一位)

[全國模]

10. 下列那個 m 值可以使得方程式 $3 \cdot 16^x - 2m \cdot 4^x - m + 6 = 0$ 有兩個相異實數？
(1) -7 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 7

[學測模]

俞克
數學