

俞克斌杯杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (26) 對數運算律

【觀念核心】

1. 定義：

$$a^x = b \text{ 的解是 } \log_a b$$

其中 a 稱為底數 ($a > 0$ 而且 $a \neq 1$)， b 稱為真數 ($b > 0$)，
而 $\log_a b$ 稱為以 a 為底時， b 的對數。

2. 對數的乘法律、除法律與次方律：

設 $a > 0, a \neq 1$ 且 x, y 皆為正實數，則

$$(1) \log_a x + \log_a y = \log_a (xy) \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$(2) \log_a x^c = c \log_a x$$

$$(3) \log_a a^x = x \quad a^{\log_a x} = x$$

3. 換底公式：

設 a, r 為不等於 1 的正數，且 $b > 0$ ，則 $\log_a b = \frac{\log_r b}{\log_r a}$ 。

【鑑往核心】

1. 已知座標平面上三點 $(3, \log 3)$ 、 $(6, \log 6)$ 與 $(12, y)$ 在同一直線上，
則 $y = \log$ _____。

【107 學測】

答：24

$$\text{解：斜率} = \frac{\log 6 - \log 3}{6 - 3} = \frac{y - \log 3}{12 - 3} \Rightarrow y = \log 24$$

2. 請問下列哪一個選項等於 $\log \left(2^{(3^5)} \right)$ ？

(1) $5 \log \left(2^3 \right)$

(2) $3 \times 5 \log 2$

(3) $5 \log 2 \times \log 3$

(4) $5(\log 2 + \log 3)$

(5) $3^5 \log 2$

【103 學測】

答：(5)

解 : $\log\left(2^{(3^5)}\right) = 3^5 \cdot \log 2$

3. 下列哪一個選項的值最大?

(1) $\log_2 3$ (2) $\log_4 6$ (3) $\log_8 12$ (4) $\log_{16} 24$ (5) $\log_{32} 48$ 。

[106 數乙]

答 : (1)

解 : $\log_2 3 > 1$ (係假分數) · 故 $\log_2 3 > \log_4 6 > \log_8 12 > \log_{16} 24 > \log_{32} 48$

【知來核心 (含 108 學年度最新完整模擬考彙整)】

1. 已知 $\log_4 x = \log_9 y = \log_6 (x - y)$ · 則 $\sqrt{\frac{x}{y}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[全國學測模]

2. 坐標平面上 · 直線 $x = m$ ($m > 0$) 與對數函數 $y = \log_2 x$ 、 $y = \log_4 x$ 、 $y = \log_8 x$ 圖形分別交於點 A_m 、 B_m 、 C_m · 下列敘述何者正確?

(1) $\overline{A_1 A_2} = \sqrt{2}$ (2) $\overline{A_3 B_9} = 6$

(3) $\overline{A_2 B_2}$ 、 $\overline{A_4 B_4}$ 、 $\overline{A_8 B_8}$ 成等比數列

(4) $\overline{A_3 B_3}$ 、 $\overline{A_6 B_6}$ 、 $\overline{A_{12} B_{12}}$ 成等差數列

(5) $\overline{A_8 B_8} : \overline{A_8 C_8} = 3 : 4$

[全國]

3. 已知函數 $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ ，若 $f(a) = b$ ，則 $f(-a) = ?$

- (A) b (B) $-b$ (C) $\frac{1}{b}$ (D) $-\frac{1}{b}$ (E) $-\sqrt{b}$

4. 設 $2 \leq x \leq 100$ ， $2 \leq y \leq 100$ ，且 $4\log_x y - 3\log_y x + 11 = 0$ ，

若 $6y^2 + x$ 之最小值為 m ，最大值為 M ，則 $m + M = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 已知 $2^{\log_4 81} = 3^{\log_9 16} = k$ 且 $\log_3 x + \log_2 y = 1$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

[中區模]

俞克斌
數學

6. 設 $a > 0$, $b > 0$, 滿足 $a^b = b^a$ 且 $b = 9a$, 得 $a = P^{\frac{1}{4}}$, 則 $F = ?$

7. 若 (a, b) 是對數函數 $y = \log x$ 圖形上一點 ,
則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上 ?

(1) $(1, 0)$ (2) $(10a, b+1)$ (3) $(2a, 2b)$ (4) $\left(\frac{1}{a}, 1-b\right)$ (5) $(a^2, 2b)$.

8. 設 $(\log y)^2 + (2^{1+x} + 2^{1-x}) \log y + (2^{1+2x} + 2^{1-2x}) = 0$, 求 $x+y =$ _____ .
(請化為最簡分數)

[中文中學測模]

俞克斌
數學

9. 若 a 、 b 是方程式 $2(\log x)^2 - 4\log x + 1 = 0$ 的根，則 $\left(\log \frac{a}{b}\right)^2$ 的值為？

- (1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5

【全國學測模】

10. 方程式 $\log_2(x-3) + \log_2(x-4) = 1$ 的所有實數解之和為何？

- (1)5 (2)6 (3)7 (4)8 (5)9。

【2019 最新學測模】

11. 設 $a > 0$ ，若 $a^{\log_3 5} = 3\sqrt{3}$ ，則最接近 $a^{(\log_3 5)^2}$ 的整數為_____。

【2019 最新學測模】

俞克斌
數學

12. 設 a 、 b 為實數，函數 $f(x) = \log_3 x$ 的圖形上有兩點 $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$ ，
已知 $a - b = 1$ 且 $f(a) - f(b) = 2$ ，則 a 之值為何？
(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{9}$ (3) $\frac{8}{7}$ (4) $\frac{4}{3}$ (5) $\frac{9}{8}$ 。

【2019 最新學測模】

13. 設 a 、 b 為正整數，且 $1 \leq ab \leq 32$ ，若 $\log_2 \frac{b}{a}$ 為有理數，則這種有理數共有幾個？
(其中 $\log_2 2$ 與 $\log_2 \frac{4}{2}$ 為同值，只算一個，且 $\log_2 3$ 、 $\log_2 \frac{2}{3}$ 、 $\log_2 5$ 、……
皆不是有理數)
(1) 8 個 (2) 9 個 (3) 10 個 (4) 11 個 (5) 12 個。

【2019 最新學測模】

14. $\log_2 |x+1| - \log_2 |x-1| = 1$ 的實數解有幾個？
(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4。

【2019 最新學測模】

15. O 為原點，已知直線 $y = mx$ 與對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形交於 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點。若 $8\overline{OA} = \overline{OB}$ ，則 x_1 的值為下列哪一個選項？

- (1) $2^{\frac{3}{7}}$ (2) $2^{\frac{3}{8}}$ (3) $2^{\frac{4}{9}}$ (4) $2^{\frac{2}{5}}$ (5) $\sqrt{2}$ 。

【2019 最新學測模】

16. 已知 $\log_a b$ 有意義，且 a 、 b 為小於或等於 100 的正整數，請問下列哪些正確？

- (1) 全部的數對 (a, b) 共有 10000 種
(2) 若 $\log_a b$ 為整數，則 $\log_a b$ 有 6 種不同的值
(3) 若 $\log_a b$ 為整數，則數對 (a, b) 有 214 種
(4) $\log_a b$ 的值不可能是負的
(5) $\log_a b > 1$ 的機率和 $\log_a b < 1$ 的機率相等。

【2019 最新學測模】

兄
斌
數
學