

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (27) 對數函數圖

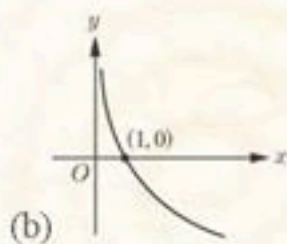
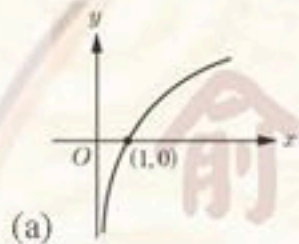
【觀念核心】

1. 定義：

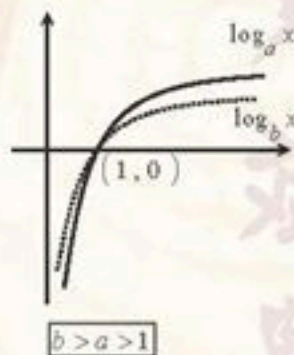
設 a 為不等於 1 的正數且 $x > 0$ ，
我們稱 $y = f(x) = \log_a x$ 是以 a 為底的對數函數，
定義域為 $\{x | x \in \mathbb{R}^+\}$ ，值域為 $\{y | y \in \mathbb{R}\}$ 。

2. 對數函數的圖形：

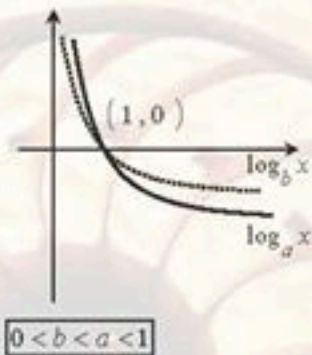
- (1) 當 $a > 1$ 時，對數函數 $y = \log_a x$ 為嚴格遞增函數，其圖形如圖(a)表示。
- (2) 當 $0 < a < 1$ 時，對數函數 $y = \log_a x$ 為嚴格遞減函數，其圖形如圖(b)表示。



3. 對數函數圖形的性質：



1. 必過點 $(1, 0)$
2. 以 y 軸為漸近線
3. 為嚴格遞增函數
4. 必為一對一函數
5. 曲線凹口向下



1. 必過點 $(1, 0)$
2. 以 y 軸為漸近線
3. 為嚴格遞減函數
4. 必為一對一函數
5. 曲線凹口向上

【鑑往核心】

5. 坐標平面上，已知直線 L 與函數 $y = \log_2 x$ 的圖形有兩個交點 $P(a, b)$ 、 $Q(c, d)$ ，
且 \overline{PQ} 的中點在 x 軸上，試選出正確的選項：
(1) L 的斜率大於 0 (2) $bd = -1$ (3) $ac = 1$ (4) L 的 y 截距大於 -1
(5) L 的 x 截距大於 1。

【107 數甲】

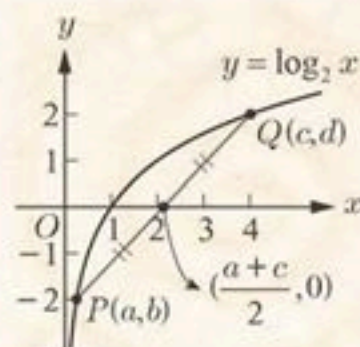
答：(1)(3)(5)

解：∵ $b + d = 0$ ∴ $\log_2 a + \log_2 c = 0 \Rightarrow ac = 1$

$$\text{令 } P(t, s), Q\left(\frac{1}{t}, -s\right),$$

其中 $t > 1, s > 0$, 故 L 斜率 $\frac{2s}{t - \frac{1}{t}} > 0$

$$L: (y - s) = \frac{2s}{t - \frac{1}{t}}(x - t)$$



$$\begin{cases} x \text{ 截距 } \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1 \\ y \text{ 截距 } \frac{-t^2 s - s}{t^2 - 1} = \left(-1 - \frac{2}{t^2 - 1} \right) s \xrightarrow{\text{取 } t=2, s=1} \leq -1 \end{cases}$$

解: $\because b + d = 0 \therefore \log_2 a + \log_2 c = 0 \Rightarrow ac = 1$

令 $P(t, \log_2 t), Q\left(\frac{1}{t}, -\log_2 t\right)$, 其中 $t > 1$, 故 L 斜率 $\frac{2\log_2 t}{t - \frac{1}{t}} > 0$

$$L: (y - \log_2 t) = \frac{2\log_2 t}{t - \frac{1}{t}}(x - t), \text{ 故 } x \text{ 截距 } \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 1$$

取 $t = 2 \Rightarrow P(2, 1), Q\left(\frac{1}{2}, -1\right), L: (y - 1) = \frac{4}{3}(x - 2)$, 故 y 截距 $-\frac{5}{3} < -1$

解: $\because b + d = 0 \therefore P(2^t, t), Q(2^{-t}, -t) \xrightarrow{t > 0} (2) bd = -t^2 \quad (3) ac = 1$

$$L \text{ 斜率 } \frac{2t}{2^t - 2^{-t}} > 0, L: (y - t) = \frac{2t}{2^t - 2^{-t}}(x - 2^t)$$

$$\text{故 } x \text{ 截距 } \frac{2^t + 2^{-t}}{2} \geq \sqrt{2^t \cdot 2^{-t}} = 1$$

取 $t = 1 \Rightarrow P(2, 1), Q\left(\frac{1}{2}, -1\right), L: (y - 1) = \frac{4}{3}(x - 2)$, 故 y 截距 $-\frac{5}{3} < -1$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 請問下列敘述哪些是正確的？

- (1) 將 $y = \log x$ 的圖形向右平移 2 個單位後，可以得到 $y = \log(x-2)$ 的圖形
- (2) 將 $y = \log x$ 的圖形向上平移 3 個單位後，可以得到 $y = \log 1000x$ 的圖形
- (3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^2$ 的圖形與 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形相同
- (4) $y = \log_2 x$ 的圖形與 $y = \log_{0.5} x$ 的圖形對稱於 x 軸
- (5) $y = \log_2 x$ 的圖形與 $y = \log_2 |x|$ 的圖形對稱於 y 軸

2. 若 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_2 b \cdot 2^c = \left(\frac{1}{2}\right)^c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^d = \log_{\frac{1}{2}} d$ ，

$\log_2 e = \log_{\frac{1}{2}} e$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) $0 \leq a, b, c, d, e \leq 1$
- (2) $c < d < a < b < e$
- (3) $c < d < a < e < b$
- (4) $c < a < d < e < b$
- (5) $c < a < e < d < b$

3. 設方程式 $x + \log_2 x = 1$ 、 $x + \log_2 x = 2$ 、 $x + \log_3 x = 3$ 的根分別是 a 、 b 、 c ，則下列選項何者正確？
 (1) $a < b < c$ (2) $a < c < b$ (3) $b < c < a$ (4) $b < a < c$ (5) $c < a < b$

4. 「若函數 $y = f(x)$ 的圖形，沿一直線 L 對稱後，與函數 $y = g(x)$ 的圖形完全重合，則稱此兩函數圖形對稱於直線 L ，例如 $y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 對稱於直線 $y = x$ 。」下列哪些選項中的兩個函數圖形也會對稱於某一直線 L ？

(1) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$ 、 $g(x) = -x^2 - 2x - 3$

(2) $f(x) = \sqrt{2}^x$ 、 $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

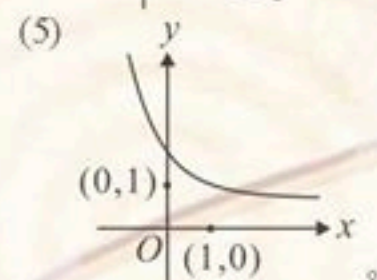
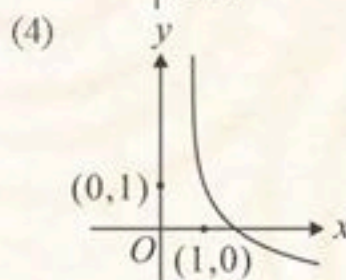
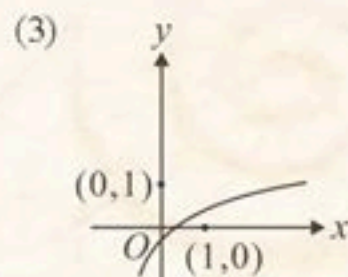
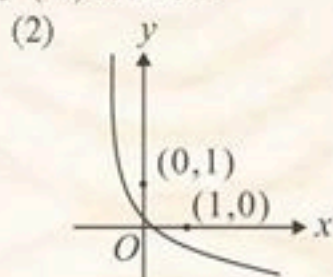
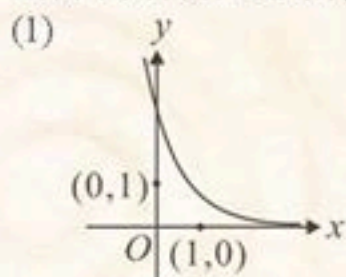
(3) $f(x) = 2^x + 3$ 、 $g(x) = -2^x - 3$

(4) $f(x) = \log_2 x$ 、 $g(x) = \log_4 4x$

(5) $f(x) = \log_2 2x$ 、 $g(x) = \log \frac{1}{2} \frac{x}{2}$ 。

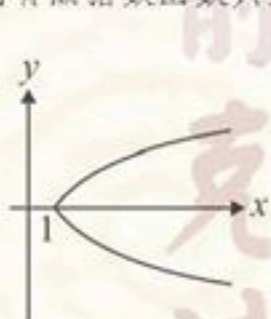
[2019 最新學測模]

5. 已知 $A(3, 2)$ 是對數函數 $y = \log_a x$ 上的一點，若 $f(x) = \log_{(2-a)}(x+a-1)$ ，試問下列何者可能是 $y = f(x)$ 的圖形？

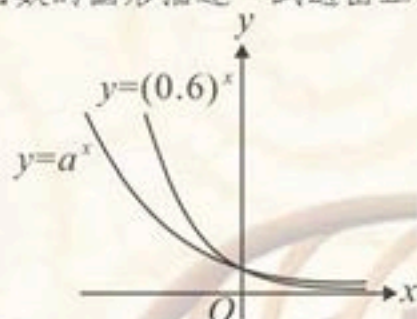


【2019 最新學測模】

6. 下列有關指數函數與對數函數的圖形描述，試選出正確的選項：



圖(一)



圖(二)

- (1) 在坐標平面上， $y = \log_3 \frac{1}{x}$ 的圖形與 $y = \log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸
- (2) $y = |\log_a x|$ ($a > 1$) 的圖形可以為圖(一)
- (3) 在坐標平面上， $y = \log_3 x$ 的圖形經過平移後可與 $y = \log_5 x$ 的圖形重合
- (4) 作 $y = (1.2)^x$ 與 $y = x$ 兩函數的圖形，可知方程式 $(1.2)^x - x = 0$ 沒有實根
- (5) 如圖(二)，其中底數 a 之值比 0.6 小。

【2019 最新學測模】

7. 關於指數函數與對數函數的圖形，請選出正確的選項：

- (1) 設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 的圖形與 $y = -a^x$ 的圖形對稱於 y 軸
- (2) $y = \log_2 x$ 的圖形無法經過適當的平移後與 $y = \log_2 (3x-1)$ 的圖形重合
- (3) 設 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $y = a^x$ 的函數圖形上取相異兩點 A 、 B ，則直線 AB 的斜率為正
- (4) $y = \log_2 x^2$ 的圖形與 $y = 2x$ 的圖形沒有交點
- (5) $y = \log_4 x$ 的圖形與 $y = -\log_2 \sqrt{x}$ 的圖形對稱於 x 軸。

[2019 中區學測模擬考]



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利