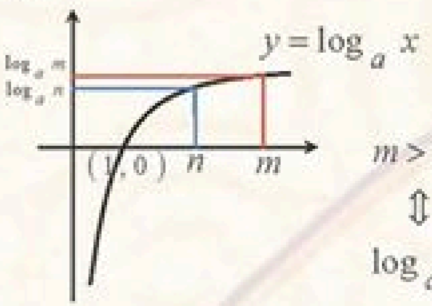
俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測
(29) 對數不等式

【觀念核心】

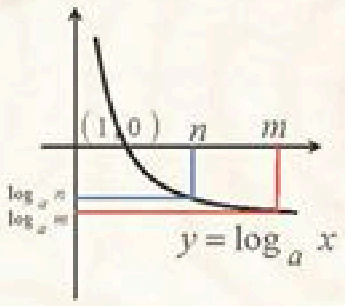
(1) 對數不等式：



$m>n$

$\Updownarrow$

$\log_a m>\log_a n$



$m>n$

$\Updownarrow$

$\log_a m<\log_a n$

(2) 自然限制：指數 $a>0 \xrightarrow{x\in R} a^x>0$

對數 $\log_a b \longrightarrow b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

【鑑往核心】

1. 設 $0<x<1$，請選出正確的選項：

(1) $x^2<\sqrt{x}<x$　(2) $\log_{10}\left(x^2\right)<\log_{10}x<\log_{10}\sqrt{x}$

(3) $\log_2\left(x^2\right)<\log_{10}\left(x^2\right)<\log_2 x$　(4) $\log_{10}\left(x^2\right)<\log_2\sqrt{x}<\log_{10}x$。

【101 數乙】

答：(2)(4)

解：(1) 錯誤：應為 $\sqrt{x}>x>x^2$（∵小數開根號會越來越大，相乘會越乘越小）

(2) 正確，底數=10 比1大　$\therefore \log\sqrt{x}>\log x>\log x^2$

(3) $\log_2 x=\dfrac{\log_{10}x}{\log_{10}2}=\dfrac{\log_{10}x}{0.3010}=(\dfrac{1}{0.3010})\log_{10}x\fallingdotseq(3.32)\log_{10}x$

$\log_{10}x^2=2\log_{10}x$

$\log_2 x^2=2\log_2 x=2\times\dfrac{\log_{10}x}{\log_{10}2}=(\dfrac{2}{0.3010})\log_{10}x\fallingdotseq(6.64)\log_{10}x$

$\because 0<x<1$　$\therefore \log_{10}x^2>\log_2 x>\log_2 x^2\Rightarrow$ 錯誤

(4) $\log_2\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\log_2 x=(\dfrac{1}{2})(\dfrac{\log_{10}x}{\log_{10}2})=(\dfrac{1}{2\times 0.3010})\log_{10}x\fallingdotseq(1.61)\log_{10}x$

$\because 0<x<1 \quad \therefore \log_{10}x>\log_2\sqrt{x}>\log_{10}x^2 \Rightarrow$ 正確

解：此類考題，可以取適當數字代入驗測。例如取 $x=\dfrac{1}{4}$

(1) $\dfrac{1}{16}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{4}$，是錯的

(2) $\log_{10}\dfrac{1}{16}<\log_{10}\dfrac{1}{4}<\log_{10}\dfrac{1}{2}$，亦即 $-4\log 2<-2\log 2<-\log 2$，是對的

(3) $\log_2\dfrac{1}{16}<\log_{10}\dfrac{1}{16}<\log_2\dfrac{1}{4}$，亦即 $-4<-1.\cdots<-2$，是錯的

(4) $\log_{10}\dfrac{1}{16}<\log_2\dfrac{1}{2}<\log_{10}\dfrac{1}{4}$，亦即 $-1.\cdots<-1<-0.\cdots$，是對的

2. 設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(-a)^7>(-a)^9$ (2) $b^{-9}>b^{-7}$ (3) $\log_{10}\dfrac{1}{a}>\log_{10}\dfrac{1}{b}$

(4) $\log_a 1>\log_b 1$ (5) $\log_a b\ge\log_b a$ 【102學測】

答：(1)(2)

解：(3) 應為 $\log_{10}\dfrac{1}{a}<0<\log_{10}\dfrac{1}{b}$

(4) 應為 $\log_a 1=\log_b 1=0$

(5) 不確定大小：$\begin{cases} a=2,b=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \log_a b=-\log_2 3<-1<\log_b a=-\log_3 2 \\ a=3,b=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \log_a b=-\log_3 2>-1>\log_b a=-\log_2 3 \end{cases}$

3. 請問下面哪一個選項是正確的?

(1) $3^7<7^3$ (2) $5^{10}<10^5$ (3) $2^{100}<10^{30}$

(4) $\log_2 3=1.5$ (5) $\log_2 11<3.5$ 【100學測】

答：(5)

解：(1) $3^7=2187>7^3=343$（指數律）

(2) $5^{10}=25^5>10^5$（指數律）

(3) $2^{100}=1024^{10}>10^{30}=1000^{10}$（指數律）

(4) $\log 9>\log 8\Rightarrow 2\log 3>3\log 2\Rightarrow\dfrac{\log 3}{\log 2}>\dfrac{3}{2}\Rightarrow\log_2 3>1.5$（對數律）

(4) $2^{1.5}=\sqrt{8}\ne 3\Rightarrow\log_2 3\ne 1.5$（指對數互換）

(5) $\log 121<\log 128\Rightarrow 2\log 11<7\log 2\Rightarrow\dfrac{\log 11}{\log 2}<\dfrac{7}{2}\Rightarrow\log_2 11<3.5$（對數律）

(5) $2^{3.5}=\sqrt{128}>11\Rightarrow\log_2 11<3.5$（指對數互換）

4. 試求所有滿足$\log\left(x^3-12x^2+41x-20\right)\geq 1$的$x$值之範圍 [100數甲]

答：$x\geq 6$、$1\leq x\leq 5$

解：$\log\left(x^3-12x^2+41x-20\right)\geq 1=\log 10$

$\Rightarrow\ x^3-12x^2+41x-20\geq 10\ \Rightarrow\ (x-1)(x-5)(x-6)\geq 0$

$\Rightarrow\ x\geq 6$、$1\leq x\leq 5$（此範圍均使真數>0，

因為滿足$x^3-12x^2+41x-20\geq 10$，當然滿足$x^3-12x^2+41x-20>0$）

5. 設正實數b滿足$(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$，試選出正確的選項：

(1)$1\leq b\leq\sqrt{10}$　(2)$\sqrt{10}\leq b\leq 10$　(3)$10\leq b\leq 10\sqrt{10}$

(4)$10\sqrt{10}\leq b\leq 100$　(5)$100\leq b\leq 100\sqrt{10}$。 [108年學測]

答：(4)

解：原式：$2\log b+2+\log b=7\Rightarrow\log b=\dfrac{5}{3}$　$\therefore\dfrac{3}{2}\leq\log b\leq 2$　$\therefore 10\sqrt{10}\leq b\leq 100$

【知來核心（含108學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 設$1<a<b<a^2$，

比較下列四數$x=\log_a b$、$y=\log_b a$、$z=\log_a\dfrac{a}{b}$、$w=\log_b\dfrac{b}{a}$之大小關係？

(A) $x>y>z>w$　(B) $x>y>w>z$　(C) $x>w>y>z$

(D) $w>z>x>y$　(E) $w>z>y>x$

2. 已知$a=2^{0.8}$，$b=\log_\pi 3$，$c=\log_2\left(\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)$，則下列選項何者正確？

(1)$a>b>c$　(2)$a>c>b$　(3)$b>a>c$　(4)$b>c>a$　(5)$c>a>b$。 [全國模(甲)]

3. 下列哪些a值可使方程式$x^2-2x+\log\left(2a^2-a\right)=0$有兩個正實根？

(1)$a=1$ (2)$a=-\sqrt{2}$ (3)$a=\dfrac{1}{\pi}$ (4)$a=\log_5 15$ (5)$a=\tan\dfrac{5\pi}{18}$。 【全國】

4. 已知a為實數且$0<a<1$，則下列各數中哪一個數最小？

(1)a^2 (2)a^3 (3)$\log_2 a$ (4)$\log_3 a$ (5)2^a。

【2019 最新學測模】

5. 設n為正整數，且$\log_3(n+20)-\log_3 n\leq\dfrac{1}{2}$，則$n$的最小值為＿＿＿＿。

【2019 最新學測模】

6. 不等式$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)>-1+\log_{\frac{1}{9}}(x+2)$的所有整數解之總和為________。

【2019 北區學測模①】

7. 已知x、y均為正數，若$2x+y=16$，則$\log_{0.5}x+\log_{0.5}y$的最小值為________。

【2019 最新學測模】