

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (31) 常用對數應用問題 A

【觀念核心】

1. 配合題意列式
2. 利用對數方程式、對數不等式原理
3. 善用內插法、查表法

【鑑往核心】

1. 若正實數 x, y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$, $\log_{10} y = 5.6$,

則 $\log_{10} (x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值?

- (1) 2.8 (2) 5.6 (3) 5.9 (4) 8.4 (5) 11.2

【101 學測】

答：(3)

解： $\log_{10} x = 2.8 \Rightarrow x = 10^{2.8}$, $\log_{10} y = 5.6 \Rightarrow y = 10^{5.6}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_{10} (x^2 + y) &= \log_{10} \left[\left(10^{2.8} \right)^2 + 10^{5.6} \right] = \log_{10} \left(2 \times 10^{5.6} \right) = \log 2 + \log 10^{5.6} \\ &= \log 2 + 5.6 \approx 0.301 + 5.6 = 5.901 \end{aligned}$$

2. 坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 P 、 Q 兩點；

直線 $x=10$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 R 、 S 兩點。

試問四邊形 $PQRS$ 的面積最接近下列哪一個選項？（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ）

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

【102 數甲】

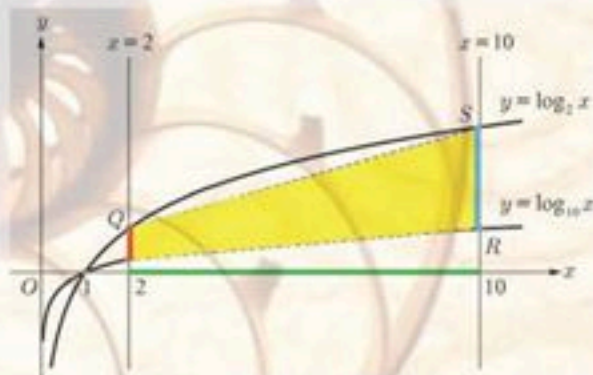
答：(3)

解：上底 = $\log_2 2 - \log_{10} 2 \approx 1 - 0.3010 \approx 0.699$

$$\text{下底} = \log_2 10 - \log_{10} 10 \approx \frac{1}{0.3010} - 1 \approx 2.322$$

$$\text{高} = 10 - 2 = 8$$

$$\text{梯形 } PQRS \text{ 面積} \approx \left[0.699 + 2.322 \right] \times \frac{8}{2} \approx 12.08$$



3. 請問指數方程式 $2^{10^x} = 10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？

（ $\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$ ）

- (1) 1.1 (2) 1.2 (3) 1.3 (4) 1.4 (5) 1.5

【103 數甲】

答：(3)

解： $10^x \log 2 = 6 \Rightarrow 10^x \doteq \frac{6}{0.3010} \doteq 19.93 \dots \Rightarrow x \doteq \log 19.93 \doteq \log 20 \doteq 1.3$

4. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。

- (1) $25 \leq a^5 < 30$ (2) $30 \leq a^5 < 35$ (3) $35 \leq a^5 < 40$
(4) $40 \leq a^5 < 45$ (5) $45 \leq a^5 < 50$

【106 數甲】

答：(5)

解： $a = 10^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a^5 = 10^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \log a^5 = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$ 。

又 $\log 45 \approx 1.6532$ 、 $\log 50 = 1.6990$ ，故 $45 \leq a^5 < 50$

5. 設 $a = 10^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ， $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $1 < a$ (2) $a < \sqrt{3}$ (3) $a^2 < b^{\sqrt{3}}$ (4) $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$ (5) $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$

【105 數乙】

答：(1)(3)(4)

解：(1) $\log a = \log 10^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29 \dots > \log 1 = 0 \Rightarrow a > 1$

(2) $\log a = \log 10^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.29 \dots > \log \sqrt{3} \approx 0.23 \dots \Rightarrow a > \sqrt{3}$

(3) $\log a^2 = 2 \log a < \log a^{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \log a \Rightarrow a^2 < a^{\sqrt{6}} = b^{\sqrt{3}}$

(4) $\log 10^{0.4} = 0.4 < \log a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \log a = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < \log 10^{0.5} = 0.5$
 $\Rightarrow 10^{0.4} < b < 10^{0.5}$

(5) $\log (ab)^{\sqrt{2}} = \log \left(a^{1+\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = (2+\sqrt{2}) \log a = 1 = \log 10 \Rightarrow (ab)^{\sqrt{2}} = 10$

6. 一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？

- (1) 10^{-5} (2) 10^{-6} (3) 10^{-7} (4) 10^{-8} (5) 10^{-9} 。

【107 年學測】

答：(3)

解： $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \Rightarrow \log x = -10 \log 5 = -6.990 = -7 + 0.01 = \log 1. \dots \times 10^{-7}$

解： $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^{10} = 2^{10} \times 10^{-10} = 1024 \times 10^{-10} = 1.024 \times 10^{-7}$

7. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^9 < 2^x < 9^{10}$?

(1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 0個。

[107年學測]

答：(2)

$$\begin{aligned} \text{解：} \log 10^9 < \log 2^x < \log 9^{10} &\Rightarrow \frac{9}{0.3010} < x < \frac{10 \times 0.9542}{0.3010} \\ &\Rightarrow 29.90\dots < x < 31.70\dots \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 30, 31 \end{aligned}$$

8. 設 $2^x = 3 \cdot 3^y = 4$ 。試選出正確的選項：(註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

(1) $x < 2$ (2) $y > \frac{3}{2}$ (3) $x < y$ (4) $xy = 2$ (5) $x + y < 2\sqrt{2}$ 。

[107數乙]

答：(1)(4)

$$\begin{aligned} \text{解：} x = \log_2 3 < \log_2 4 = 2, y = \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2} \\ x \div \frac{0.4771}{0.3010} \div 1.58\dots > y \div \frac{0.6020}{0.4771} \div 1.26\dots \\ xy = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} = 2, x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2} \text{ (算幾)} \end{aligned}$$

9. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數 (Fermat Number) 定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ 。

例如 $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ， $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ 。

試問 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？

($\log 2 \approx 0.3010$)

(1) 120 (2) 240 (3) 600 (4) 900 (5) 1200。

[108數甲]

答：(5)

$$\text{解：} \log \frac{F_{13}}{F_{12}} = \log \frac{2^{(2^{13})} + 1}{2^{(2^{12})} + 1} \approx \log 2^{(2^{13} - 2^{12})} = 2^{12} \times 0.3010 \approx 1232.896$$

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 座標平面上，直線 $x = k$ ($k > 0$) 與 $y = \log_2 x$ 、 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 的圖形分別交於 A_k 、 B_k 。

則關於四邊形 $A_2 B_2 B_4 A_4$ 、 $A_{\frac{1}{3}} B_{\frac{1}{3}} B_3 A_3$ 、 $A_{\frac{1}{4}} B_{\frac{1}{4}} B_2 A_2$ 的面積分別為 S_1 、 S_2 、 S_3 。

請選出正確的選項。($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$)

- (1) $S_1 > S_2 > S_3$ (2) $S_2 > S_1 > S_3$ (3) $S_2 > S_3 > S_1$
 (4) $S_3 > S_2 > S_1$ (5) $S_3 > S_1 > S_2$

【全國】

2. 已知 $100^{|k|} < 12^{10}$ ，試問符合條件的整數 k 有多少個？

- (1)6 (2)10 (3)11 (4)13 (5)25。

【2019 最新學測模】

俞克斌
數學

3. 工程用計算機有一個平方鍵 x^2 與倒數鍵 $1/x$ 。若輸入一個數字後按平方鍵 x^2 ，計算機螢幕會輸出該數字的平方，例如：輸入數字10後按平方鍵 x^2 ，螢幕輸出的數字為100。若輸入一個數字後按倒數鍵 $1/x$ ，計算機螢幕會輸出該數字的倒數，例如：輸入數字10後按倒數鍵 $1/x$ ，螢幕輸出的數字為0.1。根據以上的說明，如果輸入數字2，再交替按平方鍵 x^2 與倒數鍵 $1/x$ 各5次，即

$$2 \rightarrow x^2 \rightarrow 1/x \rightarrow x^2 \rightarrow 1/x \rightarrow x^2 \rightarrow 1/x \rightarrow x^2 \rightarrow 1/x \rightarrow x^2 \rightarrow 1/x$$

則該計算機螢幕輸出的數字最接近下列何者？

- (1) 4×10^9 (2) 4×10^{10} (3) 2×10^{-9} (4) 4×10^{-9} (5) 2×10^{-10} 。

[2019 最新學測模]

4. 如下表為 $\log_{10} N$ 對數表的一部分，設 a 為正實數且 $a \neq 1$ ，已知 P 、 Q 分別為函數 $y = \log_a x$ 圖形上的兩點，且其 x 坐標分別為10與100，已知直線 PQ 斜率為-0.1，關於 a 的範圍，試選出正確的選項：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025

- (1) $0.74 \leq a < 0.75$ (2) $0.75 \leq a < 0.76$ (3) $0.76 \leq a < 0.77$ (4) $0.77 \leq a < 0.78$
 (5) $0.78 \leq a < 0.79$ 。

[2019 最新學測模]

5. 數列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 有關係式 $\log_{n+1} a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$.

若 $\frac{a_n}{n+1} < 1.6$, 則自然數 n 之最小值為_____。

[2019 最新學測模]

6. 某新聞報導：「行星撞地球即將發生？根據美國太空總署 (NASA) 新數據指出，一顆直徑約1100 英尺的巨大小行星，正持續朝地球靠近，有機會於2029 年撞擊地球，並釋放出11萬4000顆廣島原子彈的能量。……」目前國際使用芮氏規模來表示地震強度，假設發生芮氏規模 M 的地震時，地震震央所釋放出的能量為 E (焦耳)，其公式為： $\log E = 4.8 + 1.5M$ 。已知一顆廣島原子彈所釋放的能量約相當於芮氏規模6.2 的地震，若只以能量觀點來看，上述新聞中的小行星若真的撞擊地球，所釋放的能量約相當於芮氏規模_____的地震。(四捨五入至小數點後第一位，已知 $\log 1.14 \approx 0.057$)

[2019 最新學測模]

先
試
數
學

7. 設芮氏規模 x 的地震，

震央所釋放出來的能量 $f(x)$ 可表為 $f(x) = a \cdot b^x$ ，其中 a 、 b 為常數。

已知芮氏規模 6 的地震震央所釋放出來的能量
是芮氏規模 4 的地震震央所釋放出來的能量的 1000 倍，

則芮氏規模 8.1 的地震震央所釋放出來的能量
是芮氏規模 7.3 的地震震內所釋放出來的能量的_____倍。

〔請利用參考公式所附對數表，四捨五入取至整數位〕

【2019 最新學測模】

8. 求滿足 $C_0^n - \frac{C_1^n}{3^1} + \frac{C_2^n}{3^2} - \frac{C_3^n}{3^3} + \frac{C_4^n}{3^4} - \dots + (-1)^n \times \frac{C_n^n}{3^n} < \frac{1}{2000}$ 的最小正整數 n 為

何？

(1)15 (2)16 (3)17 (4)17 (5)19。

【2019 最新學測模】

先
試
數
學

9. 音量的強度通常以分貝為單位表示，分貝 (S) 與聲音強度 (I) 的計算公式為 $S = 10 \log \frac{I}{I_0}$

· 其中 I_0 是人耳可聽到的最小聲音強度 $10^{-12} \left(\frac{W}{m^2} \right)$ 。

警報器是消防安檢的重要設備之一，設某警報器其音量強度為 90 分貝，如果五個同款警報器一起發聲，則測出來的音量強度最接近下列何值？

(1) 97 分貝 (2) 99 分貝 (3) 150 分貝 (4) 225 分貝 (5) 450 分貝。

[2019 最新學測模]

10. 下列有關指數與對數的運算，試選出正確的選項：

(1) 若 $2a \neq b$ ，則 $3^{\frac{2a+b}{2}} > \frac{1}{2} (3^{2a} + 3^b)$ (2) $2^{100} > 10^{31}$ (3) $\log_8 27 = \log_2 3$

(4) $(\log_3 4)(\log_5 6) = (\log_3 6)(\log_5 4)$

(5) 設 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，則 $5^{\log_a b} = b^{\log_a 25}$ 。

[2019 最新學測模]

11. 設一等比數列的前三項 a_1 、 a_2 、 a_3 滿足 $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 = 6$ ，
且 $a_2 - a_3 = 50$ ，則下列敘述哪些正確？

(1) $a_1 a_2 a_3 = 64$ (2) $a_2 = 50$ (3) 此數列公比為 $\frac{1}{2}$

(4) $\log(a_1 + a_2 + a_3) < \log a_1 + \log a_2 + \log a_3$

(5) 若 S_n 為此數列的前 n 項和，則 $|S_{24} - 400| < \frac{1}{1000}$ 。

[2019 最新學測模]



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利