

俞克斌杯

的核心 100 for 2019 大學入試學測 (32) 常用對數應用問題 B

【觀念核心】

1. 生長問題
2. 半衰期問題
3. 利率問題

【鑑往核心】

1. 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，
假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，
細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。
若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，
則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？
(1) 24 小時。 (2) 48 小時。 (3) 69 小時。 (4) 96 小時。 (5) 117 小時。
已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$

[95 學測]

答：117

解：設 t 小時後可達成，則 $\frac{(3)^{\frac{t}{3}}}{(2)^{\frac{t}{2}}} = 10 \Rightarrow (3)^{\frac{t}{3}} = 10 \times (2)^{\frac{t}{2}}$

$$\text{兩邊取對數：} \frac{t}{3} \times \log 3 = \log 10 + \frac{t}{2} \log 2 \Rightarrow t \approx 117$$

2. 設年利率為 12.5%，若依複利計算，亦即「本利和 = 本金 $(1 + \text{利率})^{\text{期數}}$ 」，
則至少要 _____ 年 (取整數年數)，本利和才會超過本金的 2 倍。
 $\log 9 = 0.9542$ 、 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 8 = 0.9030$ 。

[86 日自]

答：6

解：本利和 = 本金 $\times (1 + 12.5\%)^n > 2 \cdot \text{本金} \Rightarrow (1.125)^n > 2$
 $\Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^n > 2 \xrightarrow{\text{兩邊取對數}} n \log\left(\frac{9}{8}\right) > \log(2)$
 $\Rightarrow n > \frac{0.3010}{0.9542 - 0.9030} = \frac{0.3010}{0.0512} \approx 5.878 \dots \Rightarrow n \text{ 取 } 6$

3. 某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則某甲需要_____年就可還清。
(答案以四捨五入計算成整數，而 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 1.006 = 0.0026$)

【88 日自】

答：13

解：要記得「借錢本利和 = 還錢本利和」

注意本題有陷阱：利息依“月”利率，最後卻問需幾“年”還清
先假設需 n 月還款。

$$\text{故 } 100(1+0.6\%)^n = 1(1+0.6\%)^{n-1} + 1(1+0.6\%)^{n-2} + \dots + 1(1+0.6\%) + 1$$

$$100(1.006)^n = \frac{1[1-(1.006)^n]}{1-(1.006)} = \frac{1[(1.006)^n - 1]}{(1.006)-1} = \frac{1.006^n - 1}{0.006}$$

$$0.6 \times (1.006)^n = 1.006^n - 1 \Rightarrow 1 = 0.4 \times (1.006)^n \Rightarrow 10 = 4 \times (1.006)^n$$

$$\text{兩邊取對數} \Rightarrow \log 10 = \log 4 + n \times \log(1.006)$$

$$\Rightarrow 1 = 0.6020 + n \times 0.0026 \Rightarrow n = \frac{0.3980}{0.0026} \approx 153 \text{ (月)} \approx 13 \text{ (年)}$$

【知來核心 (含 108 學年度最新完整模擬考彙整)】

1. 某公司實施人員經進政策，加強員工內部管理與進修並同時增進福利，希望藉此激勵員工士氣，達到五年後公司的獲利超過目前的 2 倍。假設每年獲利成長率固定，若要達成這個目標，則每年獲利成長率至少為_____%(四捨五入至整數位)

常用對數表 $y = \log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

2. 保險公司對小文宣稱，只要在2017年預先繳交30萬元，即可享有終身醫療險，並且30萬元會在40年後全數歸還給小文當作退休金。
但這樣的說法並未考慮到通貨膨脹，假設同面額的金錢價值僅有上一年度的96%（即今年的100萬與去年的96萬同價值），不考慮其他因素，試計算40年後，保險公司歸還的30萬元，實際僅價值相當於2017年的_____萬元。
（四捨五入至小數點後第二位， $\log 0.96 \approx -0.0177$ 、 $\log 1.96 \approx 0.292$ ）

【學測模】

3. 小高欲利用20年的時間準備自己未來的購屋基金，假設小高每2個月可以存30000元到銀行，若銀行願意提供每2個月0.6%的固定利率，依照複利計算，則20年期滿後小高可以從銀行領回_____萬元。（四捨五入至萬元）
（ $\log 1.006 = 0.0026$ ）

常用對數表 $y = \log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮			⋮					⋮		
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
⋮			⋮					⋮		

【雄中學測模】

4. 「GO 黑勳」錢莊貸款一律採「九出十三歸」法則計算：貸款者借 10000 元，實拿 9000 元（1000 元為貸款手續費），一期（10 天）後須償還 13000 元，並且採複利計算。今阿拓跟「GO 黑勳」貸款 20000 元（實拿 18000 元），且期間未償還任何借款，則最少經過_____個月後，阿拓須償還超過 4000000 元。（ $\log 1.3 \approx 0.1139$ ，一個月以 30 天計，不足一個月者以一個月計算） [全國]

5. 設某銀行存款的年利率為 5%，小維每年存入 1 萬元，若以複利計算、每年複利一次，且他從不提款，則 40 年後在他存入第 41 次的前一刻，依四捨五入法取到萬位，他銀行的錢約有_____萬元。

x	1.04	1.05	7.03	7.04	7.05	7.06
$\log x$	0.0170	0.0212	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488

[中一中學測模]

6. 已知放射性鐳半衰期為 1800 年，今在某地區出土一具先民遺骸，其體內含有放射性鐳只剩下生前的 15%，則估計死亡年代距今約多少年前？
 (1) 6000 (2) 5750 (3) 5500 (4) 5250 (5) 5000 ($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)

7. 1999年丹恩颱風過後，金門縣有許多藍孔雀從畜產試驗所逃出並大量繁殖，截至2018年，金門全縣有1500隻的野生藍孔雀，若不有效控制，生態學家估計在西元 t ($t \geq 2018$)年，藍孔雀的數量會有 $p(t) = 1500 \times 10^{\frac{t-2018}{10}}$ 隻。若按照此函數估計，則在西元_____年，藍孔雀的數量會超過3000隻。(年份小數點後無條件捨去至整數位，例如 $t = 2025.75$ ，約為2025年九月，須回答2025年)

[2019 最新學測模]

8. 若將 6^{100} 以科學記號表示為 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 為整數，則 $n =$ _____。

[2019 最新學測模]

9. 狗狗胖白被獸醫警告體重過重，因此飼主決定從今天開始實施一個為期10天的減重方案，每天偷偷減少胖白前一天全部吃的狗飼料量5%，以達到控制體重的目的。若飼主原本每天都固定幫胖白準備500公克的狗飼料，且胖白都會全部吃光，則這10天胖白少吃的狗飼料總重量最接近多少公克？
(1)1200 (2)1500 (3)2500 (4)3500 (5)3800。

[2019 北區學測模①]

10. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分，小南向地下錢莊借10萬元，月利率10%，每月複利計算，如果一個月後還款，須還本利和11萬元，若過兩個月才還款，則本利和為12.1萬元，若小南經過5年後才打算還款，則本利和最接近下列何值？

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

- (1)170 萬 (2)248 萬 (3)300 萬 (4)2484 萬 (5)3000 萬。

[2019 最新學測模]



俞克斌數學

俞老師與你(妳)並肩作戰，直到勝利