俞克斌杯杯的核心100 for 2019大學入試學測

(33) 常用對數首數尾數

【觀念核心】

正實數 $x=a\times10^{n}$，則『$\log x=n+\log a$』，其中：『$0\le\log a<1$，$n\in Z$』。

整數部分的 n，稱為『首數』。

正純小數部分 $\log a$，稱為『尾數』。

(1) 首數 n 為正，表示在小數點前有 $n+1$ 位數

首數 n 為負，表示在小數點後有 $|n|-1$ 個零

(2) 尾數必為『正』的『純小數』。

(3) 尾數的性質：

(i) 尾數可以判斷原數的『領導數字』

(ii) 若兩個正數的數字相同，而小數點位置不同，或最後的 0 的個數不同(即二正數的有效數字相同)，則此兩正數的對數值有相同的尾數。

【縱橫核心】

1. 已知 $\log 2\approx0.3010$，$\log 3\approx0.4771$。

(1) 請以對數律計算 $\log 1.5$（不必四捨五入）。(3 分)

(2) 請以對數律計算 $\log(1.5)^{60}$（不必四捨五入）。(3 分)

(3) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。(3 分)

(4) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。(3 分) [102 指乙]

答：(1) 0.1761 (2) 10.5660 (3) 11 位數 (4) 最左邊的數字為 3

解：(1) $\log 1.5=\log\frac{3}{2}=\log 3-\log 2=0.4771-0.3010=0.1761$

(2) $\log(1.5)^{60}=60\log 1.5=10.5660$

(3) $\because \log(1.5)^{60}$ 之首數為 10 $\therefore (1.5)^{60}$ 為 11 位數

(4) $\because \log(1.5)^{60}$ 之尾數為 0.5660 $\therefore (1.5)^{60}$ 最左邊的數字為 3

(3)(4) $\because \log(1.5)^{60}=10+0.5660=\log 10^{10}+\log 3.\cdots=\log 3.\cdots\times10^{10}$

$\therefore (1.5)^{60}$ 為 11 位數，且最左邊的數字為 3

2. 第1天獲得1元、第2天獲得2元、第3天獲得4元、第4天獲得8元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第30天，試問這30天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？
(1)10,000元　(2)1,000,000元　(3)100,000,000元
(4)1,000,000,000元　(5)1,000,000,000,000元。【104學測】

答：(4)

解：$1+2+4+\cdots+2^{29}=\dfrac{1\left[1-2^{30}\right]}{1-2}=2^{30}-1$。$\log 2^{30}\fallingdotseq 30\times 0.3010=9.03$，表十位數

3. 觀察2的次方所形成的等比數列：2，2^2，2^3，2^4，......，設其中出現的第一個13位數為2^n，則$n=$________。（註：$\ell og_{10}2\approx 0.3010$）
【101數乙】

答：40

解：2^n為13位數，表首數為12，

故$12<\ell og\,2^n<13\Rightarrow \dfrac{12}{0.3010}<n<\dfrac{13}{0.3010}\Rightarrow 39.86\ldots\ldots<n<43.19\ldots\ldots$

$\Rightarrow n=40$，41，42，43

4. 已知正整數a與正整數b的乘積是11位數，而a除以b的商之整數部分是2位數，則a<u>**可能**</u>為幾位數？
(1)5位數　(2)6位數　(3)7位數　(4)8位數　(5)9位數。【108數乙】

答：(2)(3)

解：$10\le \log ab<11$，$1\le \log\dfrac{a}{b}<2$

$\Rightarrow 11\le \log ab+\log\dfrac{a}{b}=\log a^2=2\log a<13$

$\Rightarrow 5.5\le \log a<6.5$，故$a$可能為6或7位數

【知來核心（含 108 學年度最新完整模擬考彙整）】

1. 已知$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$：

(1) 請以對數律計算$\log(25)^{16}$。（不必四捨五入）

(2) 請以對數律計算$\log(6)^{25}$。（不必四捨五入）

(3) 若$25^{16}+6^{25}$是m位正整數且最左邊的數字為k，求正整數m與k之值。

【全國模(乙)】

2. 已知$a=\left(3^{50}+3^{-50}\right)^{3}$，且$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，$\log 7=0.8451$，

則下列哪些正確？

(1)展開後a的第一個數字為5

(2)展開後a的個位數字是6

(3)a的整數部，有72位數

(4)展開後a的小數點後第72位開始不為零

(5)展開後a的小數點後第1個開始不為零的數字為4。

3. 已知$\log 2 \approx \log 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，$\log 5 \approx 0.6990$，其中≈表示該值為近似值，請選出正確的選項；

(1)不必四捨五入，以對數律計算$\log 0.6$的近似值為-0.2219

(2)$\log 1.2 = 2 + \log 0.6$

(3)$\log (1.2)^{100} = 100 \cdot \log 1.2$

(4)$(1.2)^{100}$的整數部分為7位數

(5)$(1.2)^{100}$的整數部分中，最左邊的數字為8。

［全國］

4. 令函數$f(n)$的定義為$\log n$的尾數部分，其中$n>0$且$n \in R$，請選出正確的選項：（已知$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$）

(1) 若$f(n) = 0.742$，則n的首位數字$=5$

(2) 若$f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$，則$n$的首位數字$=5$

(3) 可以找到正實數n，使得$f(n) = f\left(n^2\right)$

(4) $f(n)$為週期$=10^k$的週期函數，其中k為整數

5. 設$a=\left(1+3^{3}\right)\left(1+3^{6}\right)\left(1+3^{9}\right)\left(1+3^{12}\right)$，則$a$為______位數。($\log 3=0.4771$)

6. x,y,z為大於0的實數，且$\log_{10}x=\log_{2}y=\log_{3}z$，則$\log_{x}\left(y^{20}z^{10}\right)$之值最接近下列哪一個整數？
(1) 8　(2) 11　(3) 14　(4) 17　(5) 20

7. 設n為自然數，已知$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$，若1，$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$，…，$f(x_n)$，$3n+4$為等差數列，則將x_{10}化成小數表示之後，小數點後第幾位開始出現不為零的數字？

8. $\log A=\dfrac{\log_3 x}{1-\log_3 x}$，且 $\log A$ 的首數為 -1，則 x 的範圍為 $a<x<b$，求數 $(a,b)=$________。

9. 等比數列（$2^1,2^2,2^3,\cdots\cdots,2^{100}$）中，共有幾項是30位數？
(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4。

10. 設 $\log x$ 的首數是 n，尾數是 α，其中 n 是奇數，$\alpha\neq 0$，則下列敘述哪些正確？
(1) $\log x^3$ 的首數是 $3n$　(2) $\log x^2$ 的尾數是 2α　(3) $\log\sqrt{x}$ 的首數是 $\dfrac{n-1}{2}$
(4) $\log\sqrt{x}$ 的尾數是 $\dfrac{\alpha}{2}$　(5) $\log\sqrt{x}$ 的尾數是 $\dfrac{1+\alpha}{2}$。　［全國］

11. 設$a=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{100}=k\times 10^{n}$，其中$n$為整數，且$1<k<10$，試選出正確的選項：

(1)$n=-10$　(2)$\log a$的首數為-9　(3)$\log a$的尾數為0.3

(4)a乘開後自小數點後算起連續出現9個0　(5)$2<k<3$。

【2019 最新學測模】

12. 西元1640年，法國數學家費馬（Pierre de Fermat）提出了某些正整數可以用$2^{\left(2^{n}\right)}+1$表示，這些正整數我們稱之為「費馬數」(Fermat Number)，並將「費馬數」定義為$F_n=2^{\left(2^{n}\right)}+1$。例如：$F_0=2^{\left(2^{0}\right)}+1=2^{1}+1=3$，$F_1=2^{\left(2^{1}\right)}+1=2^{2}+1=5$，$F_2=2^{\left(2^{2}\right)}+1=2^{4}+1=17$，請選出正確的選項：

(1)$F_3=65$　(2)F_5為9位數　(3)F_5的最高位數字為4　(4)F_5的個位數字為7

(5)若$\dfrac{F_{10}}{F_{11}}$為一個小數，則在小數點後第308位開始出現不為0的數字。

【2019 中區學測模】