每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

【週四版：歷屆聯考題拾穗】

1. 設$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，
求證：(1)$0<\log\left(2\sin\theta\right)<1$。
(2)$\sqrt{\log\left(20\sin\theta\right)-\sqrt{\log\left(2\sin\theta\right)^4}}=1-\sqrt{\log\left(2\sin\theta\right)}$，其中對數均為常用對數。
【53年大學聯考甲組】

$\boxed{證}$：$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\sin\theta<1\Rightarrow 1<2\sin\theta<2\Rightarrow 0=\log 1<\log\left(2\sin\theta\right)<\log 2<\log 10=1$
得證：$0<\log\left(2\sin\theta\right)<1$

$\boxed{證}$：左式$=\sqrt{\left[1+\log\left(2\sin\theta\right)\right]-2\sqrt{1\times\log\left(2\sin\theta\right)}}=\sqrt{1}-\sqrt{\log\left(2\sin\theta\right)}=$右式

2. 設p、q為方程式$x^2-\left(a+d\right)x+ad-bc=0$之二根，
求證：p^3、q^3為下列方程式之二根：
$$y^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)y+\left(ad+bc\right)^3-2bc\left(3a^2d^2+b^2c^2\right)=0$$
【53年大學聯考甲組】

$\boxed{證}$：p、q為方程式$x^2-\left(a+d\right)x+ad-bc=0$之二根，故$p+q=a+d$、$pq=ad-bc$
則$p^3+q^3=\left(p+q\right)^3-3pq\left(p+q\right)=\left(a+d\right)^3-3\left(ad-bc\right)\left(a+d\right)$
$=a^3+3a^2d+3ad^2+d^3-3a^2d+3abc-3ad^2+3bcd$
$=a^3+d^3+3abc+3bcd$
則$p^3q^3=\left(pq\right)^3=\left(ad-bc\right)^3$
$=\left(ad+bc\right)^3-6a^2d^2bc-2b^3c^3$
$=\left(ad+bc\right)^3-2bc\left(3a^2d^2+b^2c^2\right)$

得證：p^3、q^3為
$$y^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)y+\left(ad+bc\right)^3-2bc\left(3a^2d^2+b^2c^2\right)=0$$
之二根

3. (1)證明：$\dfrac{a\left(\cos^4 x-\sin^4 x+a\right)}{2a\cos^2 x+a^2+1}=1-\dfrac{a+1}{2a\cos^2 x+a^2+1}$。

(2)令 $f(x)=\dfrac{a\left(\cos^4 x-\sin^4 x+a\right)}{2a\cos^2 x+a^2+1}$（$a>0$），求證對於任何實數 x，

下列不等式恆成立：$\dfrac{a(a-1)}{a^2+1}\le f(x)\le\dfrac{a}{a+1}$。

(3)求 $f(x)=\dfrac{a(a-1)}{a^2+1}$ 及 $f(x)=\dfrac{a}{a+1}$ 時 x 之值。 【53 年大學聯考甲組】

$\boxed{證}$：左式$=\dfrac{a\left(\cos^2 x-\sin^2 x+a\right)}{2a\cos^2 x+a^2+1}=\dfrac{a\left(\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)+a\right)}{2a\cos^2 x+a^2+1}=\dfrac{a\left(2\cos^2 x+a-1\right)}{2a\cos^2 x+a^2+1}$

$=\dfrac{\left(2a\cos^2 x+a^2+1\right)-a-1}{2a\cos^2 x+a^2+1}=$右式

$\boxed{證}$：$0\le\cos^2 x\le1$，故 $\underbrace{1-\dfrac{a+1}{a^2+1}}_{\substack{此時\cos^2 x=0\\ \Rightarrow x=n\pi+\frac{\pi}{2},n\in Z}}\le f(x)\le\underbrace{1-\dfrac{a+1}{2a+a^2+1}}_{\substack{此時\cos^2 x=1\\ \Rightarrow x=n\pi,n\in Z}}$

$\Rightarrow\dfrac{a^2+1-a-1}{a^2+1}\le f(x)\le\dfrac{(a+1)^2-(a+1)}{(a+1)^2}\Rightarrow\dfrac{a(a-1)}{a^2+1}\le f(x)\le\dfrac{a}{a+1}$