每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

【週五版：高考壓軸題】

1、在ΔABC中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所對應的邊為a、b、c，

(1) 若$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos A$，求$\angle A=$？

(2) 若$\cos A=\dfrac{1}{3}$，$b=3c$，求$\sin C=$？

答：(1) $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ (2) $\sin C=\dfrac{1}{3}$

解：(1) $\sin A\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\times\dfrac{1}{2}=2\cos A\Rightarrow\sin A\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}\cos A\Rightarrow\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow\angle A=\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{3}\xrightarrow{b=3c}a=2\sqrt{2}c$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\sin C=\dfrac{1}{3}$

（事實上，由$b=3c$，$a=2\sqrt{2}c$，即知$\angle B=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin C=\cos A=\dfrac{1}{3}$）

2、設M為部分正整數組成的集合，

數列$\langle a_n\rangle$的首項$a_1=1$，前n項和為S_n，

已知對任意整數k屬於M，當$n>k$時，$S_{n+k}+S_{n-k}=2\left(S_n+S_k\right)$都成立

(1) 設$M=\{1\}$，$a_2=2$，求a_5的值；

(2) 設$M=\{3,4\}$，求數列$\langle a_n\rangle$的通項公式

答：(1) $a_5=8$ (2) $\langle a_n\rangle=\langle 2n-1\rangle$

解：(1) $k\in M=\{1\}\Rightarrow k=1$，故當$n>1$時，$S_{n+1}+S_{n-1}=2\left(S_n+S_1\right)$

則$\left(S_{n+1}-S_n\right)-\left(S_n-S_{n-1}\right)=2S_1\Rightarrow a_{n+1}-a_n=2a_1=2$，$n\geq 2$

故$a_3=4$、$a_4=6$、$a_5=8$

(2) $k\in M=\{3,4\}$

當$n>k$時，$\left.\begin{array}{l}S_{n+k}+S_{n-k}=2\left(S_n+S_k\right)\\S_{n+k+1}+S_{n-k+1}=2\left(S_{n+1}+S_k\right)\end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\text{相減}} a_{n+k+1}+a_{n-k+1}=2a_{n+1}$，則$\left(a_{n+k+1}-a_{n+1}\right)=\left(a_{n+1}-a_{n-k+1}\right)$

故$k=3$時，$\left(a_{n+4}-a_{n+1}\right)=\left(a_{n+1}-a_{n-2}\right)$，取$n=4$，$\left(a_8-a_5\right)=\left(a_5-a_2\right)$

故$k=4$時，$\left(a_{n+5}-a_{n+1}\right)=\left(a_{n+1}-a_{n-3}\right)$，取$n=5$，$\left(a_9-a_6\right)=\left(a_6-a_2\right)$

故知$\langle a_n\rangle$由a_2起以為等差數列，令公差為d

當$k=3$時，$S_{n+3}+S_{n-3}=2\left(S_n+S_3\right)$，取$n=4$，則$S_7+S_1=2\left(S_4+S_3\right)$

當$k=4$時，$S_{n+4}+S_{n-4}=2\left(S_n+S_4\right)$，取$n=5$，則$S_9+S_1=2\left(S_5+S_4\right)$

$\xrightarrow{\text{相減}} a_9+a_8=2\left(a_5+a_4\right)\Rightarrow a_2+7d+a_2+6d=2\left(a_2+3d+a_2+2d\right)$

故$a_2=\dfrac{3}{2}d \xrightarrow{S_7+S_1=2\left(S_4+S_3\right)} d=2$，故數列$\langle a_n\rangle$的通項公式$=\langle 2n-1\rangle$