每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

【週四版：歷屆聯考題拾穗】

1. 設點 P 為 ΔABC 中，$\overline{AB}$ 上之一點，而 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$，
令 $a=\overline{BC}$，$b=\overline{AC}$，$c=\overline{AB}$，$z=\overline{CP}$，$\theta=\angle BPC$。
(1)證明：$a^2=\dfrac{n^2c^2}{(m+n)^2}+z^2-\dfrac{2ncz\cos\theta}{m+n}$。$b^2=\dfrac{m^2c^2}{(m+n)^2}+z^2+\dfrac{2mcz\cos\theta}{m+n}$。
(2)當 P 為 $\overline{AB}$ 之中點時，試由(1)中二式求出 z^2。（以 a、b、c 表 z^2）
【54 年大學聯考乙丙組】

答：$z^2=\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2-\dfrac{1}{2}c^2\right)$

證：$a^2=z^2+\overline{PB}^2-2\times z\times\overline{PB}\times\cos\theta=z^2+\left(\dfrac{n}{m+n}\times c\right)^2-2\times z\times\left(\dfrac{n}{m+n}\times c\right)\times\cos\theta$

$$=\frac{n^2c^2}{(m+n)^2}+z^2-\frac{2ncz\cos\theta}{m+n}$$

$$b^2=z^2+\overline{AP}^2-2\times z\times\overline{AP}\times\cos(\pi-\theta)=z^2+\left(\frac{m}{m+n}\times c\right)^2+2\times z\times\left(\frac{m}{m+n}\times c\right)\times\cos\theta$$

$$=\frac{m^2c^2}{(m+n)^2}+z^2+\frac{2mcz\cos\theta}{m+n}$$

解：P 為 $\overline{AB}$ 之中點時，$m=n$

故 $a^2+b^2=\dfrac{1}{2}c^2+2z^2\Rightarrow z^2=\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2-\dfrac{1}{2}c^2\right)$

2. 計算下列式之值：$\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\phi & -r\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\\ r\cos\theta\cos\phi & -r\cos\theta\sin\phi & 0\end{vmatrix}$。
【55 年大學聯考乙丁組】

答：$r^2\cos\theta$

$\boxed{解}$：$原式 = r^2 \sin\theta\cos^2\theta \begin{vmatrix} \sin\phi & \cos\phi & \tan\theta \\ -\sin\phi & -\cos\phi & \cot\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$

$$= r^2 \sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi \begin{vmatrix} 1 & 1 & \tan\theta \\ -1 & -1 & \cot\theta \\ \cot\phi & -\tan\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin\theta\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi\left[\tan\theta\tan\phi + \cot\theta\cot\phi + \tan\theta\cot\phi + \cot\theta\tan\phi\right]$$

$$= r^2 \cos\theta\left[\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi\right]$$

$$= r^2 \cos\theta\left[1\right] = r^2\cos\theta$$