每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

【週五版：高考壓軸題】

21. 設函數 $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$。
(1)證明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 單調遞減，在 $(0,+\infty)$ 單調遞增。
(2)若對於任意 x_1、$x_2\in[-1,1]$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le e-1$，求 m 的取值範圍。

答：(1)略　(2) $m\in[-1,1]$

證：$f'(x)=\left(e^{mx}\right)m+2x-m=\left(e^{mx}-1\right)m+2x$

當 $m>0$ 且 $x>0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{>0}\underbrace{m}_{>0}+2\underbrace{x}_{>0}>0$

當 $m<0$ 且 $x>0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{<0}\underbrace{m}_{<0}+2\underbrace{x}_{>0}>0$

當 $m=0$ 且 $x>0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{=0}\underbrace{m}_{=0}+2\underbrace{x}_{>0}>0$

表 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 單調遞增

當 $m>0$ 且 $x<0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{<0}\underbrace{m}_{>0}+2\underbrace{x}_{<0}<0$

當 $m<0$ 且 $x<0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{>0}\underbrace{m}_{<0}+2\underbrace{x}_{<0}<0$

當 $m=0$ 且 $x<0$ 時，$f'(x)=\underbrace{\left(e^{mx}-1\right)}_{=0}\underbrace{m}_{=0}+2\underbrace{x}_{<0}<0$

表 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 單調遞減

解：承(1)，$f(x)$ 的最小值為 $f(0)$

且 $\begin{cases} f(1)-f(0)\le e-1 \\ f(-1)-f(0)\le e-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(e^{m}+1-m\right)-(1+0-0)\le e-1 \\ \left(e^{-m}+1+m\right)-(1+0-0)\le e-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e^{m}-m-e+1\le 0 \\ e^{-m}+m-e+1\le 0\end{cases}$

令 $g(t)=e^{t}-t-e+1$，則 $g'(t)=e^{t}-1$

當 $t>0$ 時，$g'(t)=\underbrace{e^{t}}_{>1}-1>0$，表 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 單調遞增

當 $t<0$ 時，$g'(t)=\underbrace{e^{t}}_{<1}-1<0$，表 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 單調遞減

又 $g(1)=e-1-e+1=0$、$g(-1)=\dfrac{1}{e}+1-e+1<0$，

故 $t\in[-1,1]$ 時，$g(t)\leq 0$。亦即 $m\in[-1,1]$ 時，原命題成立