

# 每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律  
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

## 【週六版：大一微積分】

1. (a) 考慮曲線  $y^3 + y^2x + x + y = 0$ ，試求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{d^2y}{dx^2}$  在點  $(0,0)$  的值。  
(b) 王先生在距離高 4 公尺之電線桿 9 公尺處放天燈，該天燈以  $\frac{1}{3}m/sec$  之固定速度垂直上升，當天燈達到距地面 16 公尺時，請問電線桿之天燈影以多大速度縮短？

答：(a)  $-1; 0$  (b)  $-\frac{1}{12}m/sec$

解：(a)  $y^3 + y^2x + x + y = 0 \Rightarrow 3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 1 + y' = 0$   
 $\Rightarrow 6y(y')^2 + 3y^2y'' + 2yy' + 2(yy' + x(y')^2 + xyy'') + 0 + y'' = 0$   
在點  $(0,0)$  處， $1 + y' = 0$ 、 $y'' = 0$ ，故  $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -1$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0$

(b) 當天燈達到距地面 16 公尺時，影長  $\frac{4}{16} = \frac{\ell}{\ell+9} \Rightarrow \ell = 3$

則  $\frac{4}{16 + \frac{1}{3}t} = \frac{3-L}{3-L+9} \Rightarrow L = \frac{3t}{36+t}$ ，故  $\frac{dL}{dt} = \frac{(36+t) \times 3 - 3t(36)}{(36+t)^2}$

則  $\frac{dL}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{12}$ ，表電線桿之天燈影以  $-\frac{1}{12}m/sec$  速度縮短

2. 試繪  $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$  之圖形，

請討論對稱性、遞增、遞減、極值、凹性、反曲點、漸近線。

答：略

解：  $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$  為連續函數

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+9} = -\frac{x}{x^2+9} = -f(x)$ ，表  $f(x)$  為奇函數，對原點成對稱

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 9) \times 1 - x(2x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 9)^2(-2x) - (9 - x^2) \times 2(x^2 + 9)(2x)}{(x^2 + 9)^4} = \frac{2x^3 - 54x}{(x^2 + 9)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 9} = 0 \text{ , 表有水平渐近线: } y = 0$$

$x$	$-\sqrt{3}$	$-3$	$0$	$3$	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f''(x)$	$-$	$+$	$0$	$-$	$+$

