俞克斌杯杯的 甲子玄機

For 2020 大學指考

甲子(1)：數列極限

觀念篇

(1) 收斂：

無窮數列$\langle a_n \rangle$，當項數n愈來愈大，數列$\langle a_n \rangle$會非常接近（趨近）於某一定數α，則稱此種數列為收斂數列。

定數α稱為此數列的極限，記為$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，

其中符號"$\to$"代表趨近或逼近，符號"∞"代表無限大。

(2) 發散：

若無窮數列$\langle a_n \rangle$，當項數n愈來愈大，數列$\langle a_n \rangle$的值不會趨近於一定數，則稱此種數列為發散數列，此時數列$\langle a_n \rangle$的極限不存在。

(3) 極限的嚴謹定義：

Let L be a real number.

The statement $\ell im_{n\to\infty} a_n = L$ means that for each $\varepsilon > 0$,

there exists a positive integer n_0, such that if $n > n_0$, then $\left| a_n - L \right| < \varepsilon$.

(4) 數列極限的四則運算：

若數列$\langle a_n \rangle$與$\langle b_n \rangle$皆為收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，則

數列$\langle a_n + b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha+\beta$。

數列$\langle a_n - b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha-\beta$。

數列$\langle a_n \times b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha\times\beta$。

數列$\langle a_n \div b_n \rangle$亦為收斂數列，且其極限為$\alpha\div\beta$。當然$b_n \neq 0$、$\beta \neq 0$。

(5)

數列 ＼ 斂散性	和、差	積	商
兩收斂數列	收斂	收斂	收斂（分母極限$\neq 0$）
一收斂、一發散數列	發散	收斂或發散	收斂或發散
兩發散數列	收斂或發散	收斂或發散	收斂或發散

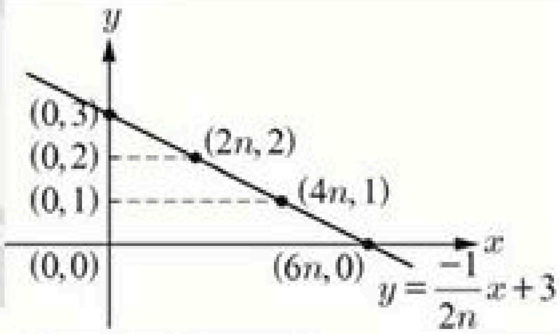
(6) n在分母型：$f(x)$、$g(x)$均為多項函數，$\left\langle \dfrac{g(x)}{f(x)} \right\rangle$的斂散規則為

當$\deg g(x) > \deg f(x)$，數列發散。
當$\deg g(x) < \deg f(x)$，數列收斂，極限為0。
當$\deg g(x) > \deg f(x)$，數列收斂，極限為$f(x)$、$g(x)$領導係數比。

回顧篇

1. 坐標平面上，x坐標與y坐標均為整數的點稱為格子點。令n為正整數，
T_n為平面上以直線$y=\dfrac{-1}{2n}x+3$，以及x軸、y軸所圍成的三角形區域（包含邊界），
而a_n為T_n上的格子點數目，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=$______。【106年指考數甲】

答：12



解：$\left.\begin{matrix} x截距6n \\ y截距3 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow a_n = \underbrace{1}_{y=3} + \underbrace{2n+1}_{y=2} + \underbrace{4n+1}_{y=1} + \underbrace{6n+1}_{y=0} = 12n+4$，

所求$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n+4}{n}=12$

2. 當n為正整數時，令$x=a_n$、$y=b_n$、$z=c_n$為三元一次聯立方程組

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$$

之唯一解，則$\ell im_{n\to\infty} a_n=$______【99年指考數甲】

答：-2

解：$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2n & n & 3 \end{vmatrix}=3-4n$、$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 8n & n & 3 \end{vmatrix}=8n$

由『克拉瑪法則』知：三元一次聯立方程組『恰一組解』時，

$x=a_n=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{8n}{3-4n}$，則$\ell im_{n\to\infty} a_n=\ell im_{n\to\infty}\dfrac{8n}{3-4n}=\ell im_{n\to\infty}\dfrac{8}{\frac{3}{n}-4}=\dfrac{8}{0-4}=-2$

3. 一盒子裡有n（$n>3$）顆大小相同的球，
其中有1顆紅球、2顆藍球以及$n-3$顆白球。從盒子裡隨機同時抽取3球，
所得球的計分方式為每顆紅球、藍球及白球分別為$2n$分、n分及1分。
若所得分數的期望值為E_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}E_n=$______。

【104年指考數甲】

答：15

解：

事件	1白	1藍	1紅
機率	$\frac{n-3}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$
得分	1	n	$2n$

$$E_n=\left(\frac{n-3+2n+2n}{n}\right)\times 3=\frac{15n-9}{n}\text{，}\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}\frac{15n-9}{n}=15$$

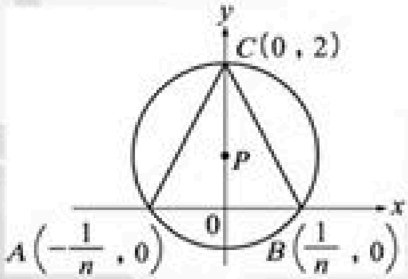
4. 設n為正整數，座標平面上有一等腰三角形，

它的三個頂點分別是$(0,2)$、$\left(\frac{1}{n},0\right)$、$\left(-\frac{1}{n},0\right)$，

假設此三角形的外接圓直徑長度等於D_n，則$\lim_{n\to\infty}D_n=$______

【91年指考數甲】

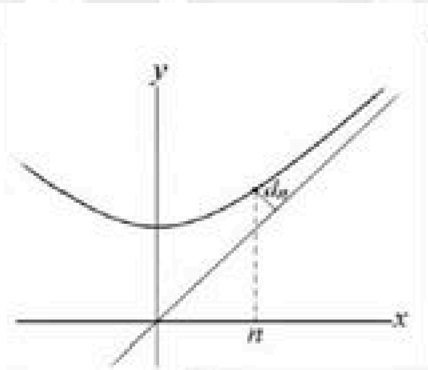
答：2



解：直角ΔPOB中：$\underbrace{\left(\frac{D_n}{2}\right)^2}_{\overline{PB}^2}=\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^2}_{\overline{OB}^2}+\underbrace{\left(2-\frac{D_n}{2}\right)^2}_{\overline{PO}^2}$

$\Rightarrow D_n=2+\frac{1}{2n^2}$，則$\lim_{n\to\infty}D_n=2$

5. 考慮雙曲線$y^2-x^2=1$圖形的上半部（如右圖），取此雙曲線上x坐標為n的點與漸近線$y=x$的距離，記為d_n，其中n為正整數。則$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot d_n\right)=$______。



【94年指考數甲】

解：雙曲線$y^2-x^2=1 \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{x^2+1}$，依題意取正，則$P\left(n,\sqrt{n^2+1}\right)$

$$P\text{到}y=x\text{距離}d_n=\left|\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$

$$\text{則}\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot d_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}(2)}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

6. 設n為正整數，方程式$x^2-2x-n=0$的兩根為a_n與b_n，且$a_n>b_n$。
試問下列哪些選項是正確的？
(1)$a_n>0$對所有n皆成立　(2)$a_n+b_n=2$對所有n皆成立
(3) $b_{n+1}>b_n$對所有n皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n a_{n+1}}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$

【97年指考數甲】

答：(1)(2)(4)(5)

解：$x^2-2x-n=0 \xrightarrow{\text{公式解}} x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4n}}{2}=1\pm\sqrt{n+1}$

$\therefore a_n=1+\sqrt{n+1}$，$b_n=1-\sqrt{n+1}$

(1)$a_n=1+\sqrt{n+1}>0, \forall n\in N$

(2)$a_n+b_n=1+\sqrt{n+1}+1-\sqrt{n+1}=2$

(3)$b_{n+1}=1-\sqrt{n+2}<1-\sqrt{n+1}=b_n$

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n\cdot a_{n+1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[1+\sqrt{n+1}\right]\cdot\left[1+\sqrt{n+2}\right]}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1+\sqrt{n+1}\right]\cdot\left[1+\sqrt{n+2}\right]}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right]}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[0+\sqrt{1+0}\right]\cdot\left[0+\sqrt{1+0}\right]}{1}=1$$

(5)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[1+\sqrt{n+1}\right]-\left[1-\sqrt{n+1}\right]}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=2$

7. 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數n，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$均成立。
若已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，試選出正確的選項。
(1)對所有的正整數n，$a_n>3$均成立
(2)存在正整數，使得$a_{n+1}>4$
(3)對所有的正整數n，$b_n^2<b_{n+1}^2$均成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=4$
(5) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-2$。

【108數甲】

答：(3)(4)

解：(1)錯，反例：$\langle a_n\rangle=\left\langle\dfrac{4n}{n+1}\right\rangle$，為嚴格遞增數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，

但$a_1=2<3$、$a_2=\frac{8}{3}<3$

(2)錯，因$\langle a_n\rangle$為嚴格遞增數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，

表4為$\langle a_n\rangle$上界，故$a_{n+1}>4$不成立

(3)對，$a_n<b_n^2<a_{n+1}$且$a_{n+1}<b_{n+1}^2<a_{n+2}$

(4)對，因$a_n<b_n^2<a_{n+1}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=4$，

由夾擠定理得知$\lim\limits_{n\to\infty}b_n^2=4$

(5)錯，反例：$\langle a_n\rangle=\left\langle\frac{4n}{n+1}\right\rangle$，則$\underbrace{\frac{4n}{n+1}}_{a_n}<\underbrace{\frac{4n^2+8n+2}{n^2+3n+2}}_{b_n^2=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})}<\underbrace{\frac{4n+4}{n+2}}_{a_{n+1}}$

表$\langle b_n\rangle=\left\langle(-1)^n\sqrt{\frac{4n^2+8n+2}{n^2+3n+2}}\right\rangle$，但$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$為發散

前瞻篇

1. 一等差級數的首項為3，公差為-3，前n項和為S_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$之值為________。

2. $S_n=1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\ldots\ldots+n\cdot 1$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=$________。

3. 已知$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$均為公差不為0的等差數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$，
k為一定實數，則$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{nb_{2n}}=$？

4. 設$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=5n^2$，對所有自然數$n$均成立，
試求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2n-1}}\right)$之值。

5. 設數列〈a_n〉滿足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4a_n-2}{5a_n+1}=2$，求〈$a_n$〉極限值________。

6. 已知$a_n=\dfrac{\sqrt{1\times3}+\sqrt{3\times5}+\sqrt{5\times7}+\cdots\cdots+\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{n^2-n+1}$，

利用夾擠原理求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________。