每日一進

修行僧人，都能貫徹「一日不作，一日不食」的自律
修業儒生，豈能推諉「一日不進，一日不食」的自課

【週一版：一千零一頁】

1. 有一實數數列 $\{a_n\}$，設 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，若 $a_1=9$ 且 $\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=a_n$，$n\geq 2$，求 a_{2019} 的值。

答：4041

解：$\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=a_n \Rightarrow \sqrt{S_n}=a_n-\sqrt{S_{n-1}}$

$\Rightarrow S_n=a_n^2-2a_n\sqrt{S_{n-1}}+S_{n-1} \Rightarrow \underbrace{a_n}_{S_n-S_{n-1}}=a_n^2-2a_n\sqrt{S_{n-1}}$

$\Rightarrow 1=a_n-2\sqrt{S_{n-1}} \Rightarrow 4S_{n-1}=a_n^2-2a_n+1$

則 $4S_n=a_{n+1}^2-2a_{n+1}+1 \Rightarrow 4\underbrace{a_n}_{S_n-S_{n-1}}=a_{n+1}^2-a_n^2-2a_{n+1}+2a_n$

$\Rightarrow 2(a_{n+1}+a_n)=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n) \Rightarrow a_{n+1}-a_n=2$

故 $\langle a_n\rangle$ 成等差（首項 $a_2=7$，公差 $d=2$），$n\geq 2$

故 $a_{2019}=a_2+2017d=7+4034=4041$

2. 在數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_1=1$，其前 n 項和 S_n 滿足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$，求數列 $\langle a_n\rangle$ 的一般項公式。

答：$a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

解：$nS_{n+1}=(n+3)S_n \Rightarrow n[S_n+a_{n+1}]=(n+3)S_n$

$\Rightarrow na_{n+1}=3S_n$，則 $(n-1)a_n=3S_{n-1}$

故 $na_{n+1}-(n-1)a_n=3\underbrace{a_n}_{S_n-S_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n}$

則 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{1}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{2}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{5}{3}$，……，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$

则 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{1\times 2}=\frac{1}{2}n(n+1)$