每日一進

就算：學科再艱深，內容再枯澀
總要：自信地堅持，倔強地進步

【週一版：一千零一頁】

1. 設各項均為實數的等比數列 $\{a_n\}$ 的前 k 項和為 S_k，公比 q 滿足 $|q|\neq 1$，
若 $S_{6n}=2S_{4n}+11S_{2n}$，則 $\dfrac{S_{10n}}{S_{8n}}=$ ______。

答：$\dfrac{341}{85}$

解：$S_{6n}=2S_{4n}+11S_{2n}\Rightarrow \dfrac{a_1\left[1-q^{6n}\right]}{1-q}=\dfrac{2a_1\left[1-q^{4n}\right]}{1-q}+\dfrac{11a_1\left[1-q^{2n}\right]}{1-q}$

$\xrightarrow{|q|\neq 1} 1+q^{2n}+q^{4n}=2\left[1+q^{2n}\right]+11\Rightarrow q^{4n}-q^{2n}-12=0\xrightarrow{q\in R} q^{2n}=4$

$$\frac{S_{10n}}{S_{8n}}=\frac{\dfrac{a_1\left[1-q^{10n}\right]}{1-q}}{\dfrac{a_1\left[1-q^{8n}\right]}{1-q}}=\frac{1-4^5}{1-4^4}=\frac{341}{85}$$

2. 已知 $f(x)$ 是定義在 R 上的函數，若 $f(0)=0$，且對任意 $x\in R$，
滿足 $f(x+4)-f(x)\leq x^2$，$f(x+16)-f(x)\geq 4x^2+48x+224$，則 $f(64)=$ ______。

答：19840

解：$f(x+4)-f(x)$

$=\left(f(x+16)-f(x)\right)-\left(f(x+16)-f(x+12)\right)$
$\quad -\left(f(x+12)-f(x+8)\right)-\left(f(x+8)-f(x+4)\right)$

$\geq\left(4x^2+48x+224\right)-(x+12)^2-(x+8)^2-(x+4)^2=x^2$

但已知 $f(x+4)-f(x)\leq x^2$，

故得知 $f(x+4)-f(x)=x^2\Rightarrow f(x+4)=f(x)+x^2$

則 $f(64)=f(60)+60^2=f(56)+56^2+60^2=f(52)+52^2+56^2+60^2$

$$= \underbrace{f(0)}_{=0} + 0^2 + 4^2 + 8^2 + \cdots + 52^2 + 56^2 + 60^2$$

$$= \sum_{k=0}^{15} 16k^2 = 19840$$