

每日一進

就算：學科再艱深，內容再枯澀
總要：自信地堅持，倔強地進步

【週一版：一千零一頁】

1. 關於 x, y, z, w 的方程組

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 + w^2 = 43 \dots\dots ① \\ y^2 + z^2 + w^2 = 29 \dots\dots ② \\ 5z^2 - 3w^2 + 4xy + 12yz + 6zx = 95 \dots\dots ③ \end{cases}$$

的解集為_____。

答： $(x, y, z, w) = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, -4), (-1, -2, -3, 4), (-1, -2, -3, -4)\}$

解：① - ② 得 $x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots\dots ④$

$$3 \times ② + ③ \text{ 得 } 3y^2 + 8z^2 + 4xy + 12yz + 6zx = 182 \dots\dots ⑤$$

$$④ + ⑤ \text{ 得 } x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx = 196$$

$$\text{故 } (x + 2y + 3z)^2 = 196 \Rightarrow x + 2y + 3z = \pm 14$$

$$\text{則原方程組等同 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ y^2 + z^2 + w^2 = 29 \dots\dots ⑥ \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ y^2 + z^2 + w^2 = 29 \dots\dots ⑦ \\ x + 2y + 3z = -14 \end{cases}$$

若方程組⑥有解，則幾何意義為：直線與圓有公共點，

$$\text{亦即 } \begin{cases} x + 2y = 14 - 3z \\ x^2 + y^2 = 14 - z^2 \end{cases}, \begin{cases} x + 3z = 14 - 2y \\ x^2 + z^2 = 14 - y^2 \end{cases}, \begin{cases} 2y + 3z = 14 - x \\ y^2 + z^2 = 14 - x^2 \end{cases} \text{ 有解}$$

$$\text{所以 } \frac{|3z - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \leq \sqrt{14 - z^2}, \frac{|2y - 14|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \leq \sqrt{14 - y^2}, \frac{|x - 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \leq \sqrt{14 - x^2}$$

$$\Rightarrow z^2 - 6z + 9 \leq 0, y^2 - 4y + 4 \leq 0, x^2 - 2x + 1 \leq 0,$$

$$\Rightarrow z = 3, y = 2, x = 1, \text{ 代式②得 } w = \pm 4,$$

若方程組⑦有解，則幾何意義為：直線與圓有公共點，

$$\text{亦即 } \begin{cases} x + 2y = -14 - 3z \\ x^2 + y^2 = 14 - z^2 \end{cases}, \begin{cases} x + 3z = -14 - 2y \\ x^2 + z^2 = 14 - y^2 \end{cases}, \begin{cases} 2y + 3z = -14 - x \\ y^2 + z^2 = 14 - x^2 \end{cases} \text{ 有解}$$

$$\text{所以 } \frac{|3z + 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \leq \sqrt{14 - z^2}, \frac{|2y + 14|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \leq \sqrt{14 - y^2}, \frac{|x + 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \leq \sqrt{14 - x^2}$$

$$\Rightarrow z^2 + 6z + 9 \leq 0, y^2 + 4y + 4 \leq 0, x^2 + 2x + 1 \leq 0,$$

$$\Rightarrow z = -3, y = -2, x = -1, \text{代式②得 } w = \pm 4,$$

因此，原方程組的解集為

$$(x, y, z, w) = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, -4), (-1, -2, -3, 4), (-1, -2, -3, -4)\}$$

全神貫注 全力以赴

克斌