癸亥(60)：大學微積分先修（泰勒展開式）

定義：$y=f(x)$ 為一 n 次多項函數，

則 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 處之 ***Taylor's*** 展開式為

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

若取 $x_0=0$，上展式稱為 ***Maclaurin*** 展開式。

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

證：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

$$=p_0+p_1(x-x_0)+p_2(x-x_0)^2+p_3(x-x_0)^3+\cdots+p_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+p_n(x-x_0)^n$$

則 $f'(x)=p_1+2p_2(x-x_0)+3p_3(x-x_0)^2+\cdots+(n-1)p_n(x-x_0)^{n-2}+(n)p_n(x-x_0)^{n-1}$

$$f''(x)=2p_2+3\cdot 2p_3(x-x_0)+\cdots+(n-1)(n-2)p_n(x-x_0)^{n-3}+(n)(n-1)p_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1p_3+\cdots+(n-1)(n-2)(n-3)p_{n-1}(x-x_0)^{n-4}+(n)(n-1)(n-2)p_n(x-x_0)^{n-3}$$

……

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)p_n\left(x-x_0\right)^{n-n}$$

則：$f\left(x_0\right)=p_0$、$f'\left(x_0\right)=p_1$、$f''\left(x_0\right)=2p_2$、$f'''\left(x_0\right)=3\cdot 2p_3$、…、$f^{(n)}\left(x_0\right)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(2)p_n$

故：$f\left(x_0\right)=p_0$、$f'\left(x_0\right)=p_1$、$\dfrac{f''\left(x_0\right)}{2!}=p_2$、$\dfrac{f'''\left(x_0\right)}{3!}=p_3$、…、$\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}=p_n$

1. 試寫出 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 附近的 ***Maclaurin*** 展開式

答：$f(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$

2. 試寫出 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 附近的 ***Maclaurin*** 展開式

答：$f(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots$

3. 試寫出 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 附近的 ***Maclaurin*** 展開式

答：$f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^7}{7!}+\ldots$

俞克斌數學