全國公私立高級中學 107 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數 學 考 科 解 析

考試日期：107 年 7 月 26~27 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	1	2	5	3	1234	135	234	14	235	245	1	1	2
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
4	5	5	8	1	2	4	1	3	4	3	1	7		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $V^2=(\frac{4}{3}\pi r^3)^2=\frac{16}{9}\pi^2r^6\cdots\cdots$①

$S^3=(4\pi r^2)^3=64\pi^3r^6\cdots\cdots$②

由$\frac{①}{②}$，得$\frac{V^2}{S^3}=\frac{1}{36\pi}\Rightarrow V^2=\frac{S^3}{36\pi}$

$\Rightarrow V=\pm(2^{-1}\times3^{-1}\times\pi^{-\frac{1}{2}}\times S^{\frac{3}{2}})$(取正)

所求 $m-n+p-q=(-1)-(-1)+(\frac{-1}{2})-\frac{3}{2}=-2$

故選(5)

2. $\log_{10}a=\frac{\log_2 a}{\log_2 10}\approx\frac{28.22}{3.32}=8.50$

故選(4)

3. $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$，$\sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{64}$，$\therefore\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$

$\Rightarrow\log_{10}\sqrt[3]{3}>\log_{10}\sqrt[4]{4}\Rightarrow\frac{\log_{10}3}{3}>\frac{\log_{10}4}{4}\Rightarrow p>q$

又 $0<q<p<1$ 且 $r>1$

得 $r>p>q$

故選(1)

4. $(x-\frac{1}{x})^2=(x+\frac{1}{x})^2-4=(2\sqrt{2})^2-4=4\Rightarrow x-\frac{1}{x}=\pm2$

所求$|x^3-\frac{1}{x^3}|-9=|(x-\frac{1}{x})^3+3\cdot x\cdot\frac{1}{x}(x-\frac{1}{x})|-9$

$=|2^3+3\cdot2|-9$

$=5$

故選(2)

5. $f(x)=0.0002x(x^2-200x+10000)$

$=0.0002x(x-100)^2$

令 $f(x)=0\Rightarrow x=0,100,100$

$\therefore$得 $a=100$

故選(5)

6. $A(2,1)$代入$\Gamma\Rightarrow1=\log_a2\Rightarrow a=2$

$B(8,b)$代入$\Gamma\Rightarrow b=\log_2 8\Rightarrow b=3$

又 $C(6,\log_2 6)$

且 $D(6,\frac{1\times1+2\times3}{3})=(6,\frac{7}{3})$

$\therefore\overline{CD}=\log_2 6-\frac{7}{3}=1+\log_2 3-\frac{7}{3}=1+\frac{\log 3}{\log 2}-\frac{7}{3}$

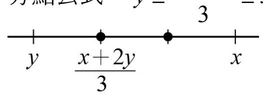
$\approx1+\frac{0.4771}{0.3010}-\frac{7}{3}\approx0.252$

故選(3)

二、多選題

7. (1) ○：原式$(x-3)^2+(y-3)^2\geq0$恆成立

(2) ○：分點公式，$y\leq\frac{x+2y}{3}\leq x$



(3) ○：$(2\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{4x+y})^2=4\sqrt{xy}\geq0$

$\therefore2\sqrt{x}+\sqrt{y}\geq\sqrt{4x+y}$

(4) ○：$|x+1|+|x-3|=|x+1|+|3-x|$

$\geq|(x+1)+(3-x)|$

$=4$

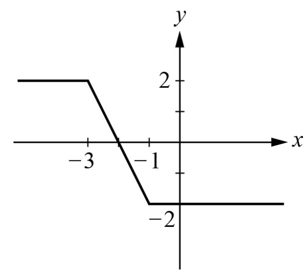
$\therefore$最小值爲 4

(5) ×：① $x>-1$時，$(x+1)-(x+3)=-2$

② $-3\leq x\leq-1$時，$(-x-1)-(x+3)=-2x-4$

③ $x\leq-3$時，$(-x-1)-(-x-3)=2$

如圖：最小值爲 -2



故選(1)(2)(3)(4)

8. 令 $f(x)=2018(x-1)(x-3)(x-5)-107(x-2)(x-4)(x-6)$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−	+	+	−	−	+	+

$\because f(0)f(1)<0$，$f(2)f(3)<0$，$f(4)f(5)<0$

依勘根定理，知方程式 $f(x)=0$

在$(0,1)$、$(2,3)$及$(4,5)$之間各有一實根

故選(1)(3)(5)

9. $f(x)\in\mathbb{R}[x]$，$2+3i$ 是 $f(x)=0$ 之一根

$\Rightarrow2-3i$ 是 $f(x)=0$ 之另一根

$[x-(2+3i)][x-(2-3i)]=x^2-4x+13$ 是 $f(x)$ 的因式

設 $f(x)=x^4-10x^3+ax^2-118x+b$

$=(x^2-4x+13)(x^2+px+q)$

比較係數$\begin{cases}-10=-4+p\\-118=13p-4q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-6\\q=10\end{cases}$

$\therefore f(x)=(x^2-4x+13)(x^2-6x+10)$

$=x^4-10x^3+47x^2-118x+130$

(1) ×：應爲 $a=47$

(2) ○

(3) ○

(4) ○：解 $x^2-6x+10=0\Rightarrow x=3\pm i$

(5) ×：應爲 $3-i$ 是 $f(x)=0$ 之一根

故選(2)(3)(4)

10. (1) ○：配方得 Γ_1：$y=\frac{1}{3}(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$ $\therefore$頂點$(\frac{-3}{2},\frac{1}{4})$

(2) ×：平移得 Γ_2：$y=g(x)=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}$

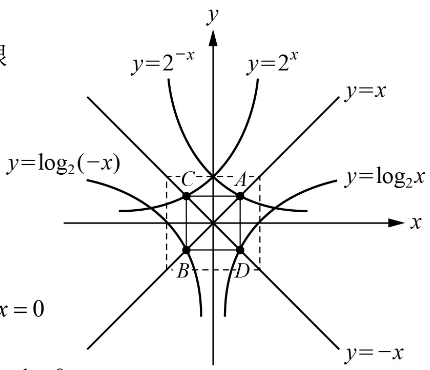
(3) ×：最大值 $g(3)=\frac{4}{3}$

(4) ○：最小值 $g(\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$

(5) ×：解 $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x^2+x+1 \\ y=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4} \end{cases}$ 可得交點 $(\frac{-5}{4},\frac{13}{48})$

故選(1)(4)

11. 作圖如右



(1) ×：B 在第三象限

(2) ○：由圖可知

(3) ○：依對稱性，可判斷

(4) ×：A、D 對稱於 x 軸

(5) ○：令 $A(a,a)$

則 a 為 $f(x)=2^{-x}-x=0$ 之一根

$f(0)=2^0-0=1>0$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}<0$

依勘根定理，可知 $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$

此四邊形為正方形，

面積 $=(2a)^2<(2\times\frac{1}{\sqrt{2}})^2=2$

故選(2)(3)(5)

12. (1) ×：令 $\log a=2+\alpha$，其中 $0.5<\alpha<1$

首數為 $2\Rightarrow a$ 的整數部分為三位數

(2) ○：$\log 4\approx 0.6020$，$\log 5\approx 0.6990$

$\therefore\alpha$ 可能介於 $\log 4$，$\log 5$ 之間

此時 a 最高位數字為 4

(3) ×：令 $\log b=(-3)+\beta$，其中 $0<\beta<0.5$

$\therefore\beta$ 不可能介於 $\log 5$，$\log 6$ 之間

即第一個不為 0 的數字不可能是 5

(4) ○：$-0.5<\log a+\log b<0.5\Rightarrow -0.5<\log ab<0.5$

$\Rightarrow 10^{-0.5}<ab<10^{0.5}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{10}}<ab<\sqrt{10}$

$\therefore ab$ 的整數部分可能是 1

(5) ○：$\begin{cases} 2.5<\log a<3 \\ 2.5<(-\log b)<3 \end{cases}\Rightarrow 5<\log\frac{a}{b}<6$

$\because\log\frac{a}{b}$ 首數為 5　$\therefore\frac{a}{b}$ 整數部分為六位數

故選(2)(4)(5)

第貳部分：選填題

A. 可知 $x^3+ax^2+bx+c=(x-1)(x-2)(x-3)$

$=x^3-6x^2+11x-6$

$\therefore b=11$

B. 假設，當甲走了 x 公尺，乙走了 $2x$ 公尺，則甲、乙距離為

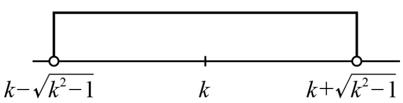
$f(x)=\sqrt{(60-x)^2+(2x)^2}=\sqrt{5(x-12)^2+2880}$

$\therefore$ 當 $x=12$ 時，甲乙兩人有最短距離 $\sqrt{2880}=24\sqrt{5}$　(公尺)

C. 公式解 $x^2-2kx+1=0\Rightarrow x=k\pm\sqrt{k^2-1}$

$\therefore$ 不等式 $x^2-2kx+1<0$ 的解為 $k-\sqrt{k^2-1}<x<k+\sqrt{k^2-1}$

如圖：依題意，必有 $4<\sqrt{k^2-1}\le 5\Rightarrow 17<k^2\le 26$



$\therefore$ 自然數 $k=5$

D. 原式 $\Rightarrow\log_a 32-\log_a 16+\log_a 8-\log_a 4+\log_a 2=1$

$\Rightarrow\log_a\frac{32\times 8\times 2}{16\times 4}=1$

$\Rightarrow\log_a 8=1$

$\Rightarrow a=8$

E. 原式 $0<x<1\Rightarrow\log_2 x<0$ 且 $\log_x 16<0$

由算幾不等式

$(-\log_2 x)+(-\log_x 16)\ge 2\sqrt{(-\log_2 x)\cdot(-\log_x 16)}=4$

$\Rightarrow\log_2 x+\log_x 16\le(-4)$

$\Rightarrow 5+\log_2 x+\log_x 16\le 1$

$\therefore$ 所求最大值為 1

F. 令 $t=2^{-\frac{x}{8}}>0$

原式 $8t^2+7t-1<0\Rightarrow(8t-1)(t+1)<0\Rightarrow -1<t<\frac{1}{8}$

考慮 $2^{-\frac{x}{8}}<\frac{1}{8}\Rightarrow 2^{-\frac{x}{8}}<2^{-3}\Rightarrow -\frac{x}{8}<-3\Rightarrow x>24$

$\therefore$ 所求 $\alpha=24$

G. 將 $(0,3)$ 及 $(1,2)$ 代回，可得 $\begin{cases} 3=a+2b \\ 2=|1-a|+b \end{cases}$

① 當 $0<a<1$ 時，$\begin{cases} 3=a+2b \\ 2=1-a+b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{4}{3} \end{cases}$

② 當 $a\ge 1$ 時，$\begin{cases} 3=a+2b \\ 2=a-1+b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}$(不合)

綜合①②得數對 $(a,b)=(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$

H. 依題意，t 小時後

$100\cdot 2^t\ge 10^7\Rightarrow 2^t\ge 10^5\Rightarrow\log 2^t\ge\log 10^5\Rightarrow t\cdot\log 2\ge 5$

$\Rightarrow t\ge\frac{5}{0.3010}\approx 16.6$

$\therefore$ 17 小時後，開始出現不適症狀