

倒數 14 天 衝刺 200 題

俞克斌老師

在每標終點線等你(妳)

第 141~154 題

141. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均為二次實係數多項式，已知

$$f(x) = a(x-2013)(x-2015) + b(x-2013) + 2,$$

$$g(x) = 2 \times \frac{(x-2014)(x-2015)}{(2013-2014)(2013-2015)} + (-1) \times \frac{(x-2013)(x-2015)}{(2014-2013)(2014-2015)} \\ + 4 \times \frac{(x-2013)(x-2014)}{(2015-2013)(2015-2014)},$$

請選出正確的選項：

- (1) 方程式 $f(x) = x^3$ 必有實根
- (2) $f(2013) = g(2013)$
- (3) 函數 $y = g(x)$ 的圖形與 x 軸有兩個交點
- (4) 若 $f(x) = g(x)$ ，則 $a = -1$
- (5) 若函數 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸為鉛直線 $x = 2014$ ，則 $b = 0$ 。

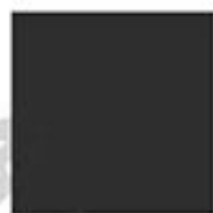
答：(1)(2)(3)(5)

142. 圖(一)是邊長為 1 的黑色正方形，現將其均分成九等分的小正方形，移走正中的那一塊，得到剩下的黑色部分面積計為 a_1 ，所成圖形如圖(二)。將圖(二)其餘的八個小正方形也各均分成九等分，並同樣移走正中那塊，得到剩下的黑色部分面積記為 a_2 ，所成圖形如圖(三)。

重複上述均分、移走正中塊的動作……。

若第 n 次移走後所餘黑色部分面積 a_n 小於圖(一)原正方形面積的 $\frac{1}{10}$ ，

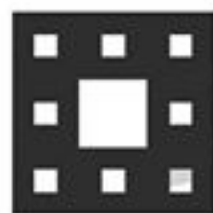
則自然數 n 之最小值為_____。($\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)



圖(一)



圖(二)



圖(三)

答：20

143. 已知空間中三平面， $E_1: x-2y+3z=4$ ， $E_2: x+7y-3z=a$ ， $E_3: x+y+bz=3$ 交於一直線 L ，請選出正確的選項：

(1) $a=5$ (2) $b=1$ (3) 直線 $L_1: \frac{x}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ ，則 $L_1 // L$

(4) 平面 $E: 3y-2z=3$ ，則 $E // L$

(5) $A(0,0,0)$ 、 $B(-3,2,1)$ ，若 P 為 L 上任一點，則 ΔPAB 之最小面積為 $\frac{\sqrt{42}}{2}$ 。

答：(2)(4)(5)

144. 已知空間中四點 $O(0,0,0)$ 、 $A(x,y,z)$ 、 $B(2,-4,4)$ 、 $C(4,1,-1)$ ，且 $x^2+y^2+z^2=2$ ，請選出正確的選項：

(1) 三角形 OBC 的面積為 $9\sqrt{2}$ (2) $|\vec{OA} \times \vec{OC}|$ 的最大值為 6

(3) $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC}) = \vec{OA} \cdot (\vec{OC} \times \vec{OB})$ (4) $\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC}) = \vec{OB} \cdot (\vec{OC} \times \vec{OA})$

(5) 三階行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的最大值為 36。

答：(1)(2)(4)(5)

145. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，三點 $P(1,2)$ 、 $Q(2,3)$ 、 $R(3,-2)$ ，

則 ΔPQR 經過矩陣 $B^{10} A^2 (B^{-1})^5$ 作用之後變為 $\Delta P'Q'R'$ ，則 $\Delta P'Q'R'$ 的面積為何？

(1) 3 (2) 12 (3) 144 (4) 48 (5) 24。

答：(5)

146. 二階方陣 $A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ ，現在以 A_2 表示 2 個 A_1 連乘， A_3 表示 3 個 A_1 連乘，

.....， A_n 表示 n 個 A_1 連乘的結果，其中 n 為自然數。令 $A_n = \begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix}$ ，例如：

$a_2 = \frac{-1}{8}$ ， $b_2 = \frac{-\sqrt{3}}{8}$ ，則下列敘述哪些正確？

克斌

$$(1) A_1 \text{ 的乘法反方陣 } A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(2) A_3 = \frac{1}{64} I_2, \text{ 其中 } I_2 \text{ 為二階單位方陣}$$

(3) a_n 不等於零，對所有自然數 n 皆成立

(4) 當 n 趨近於無窮大，數列 d_1, d_2, d_3, \dots 趨近零

(5) 存在某個自然數 n ，使得 $4a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$ 不為零

答：(4)

147. 已知正方形 $ABCD$ 的頂點 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ ，如圖。

若二階方陣 P 將 $ABCD$ 四點變換成 $A_1B_1C_1D_1$ 四點，

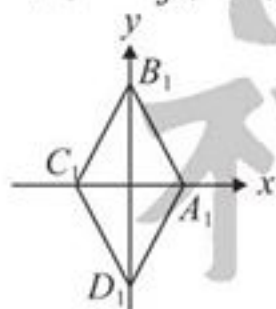
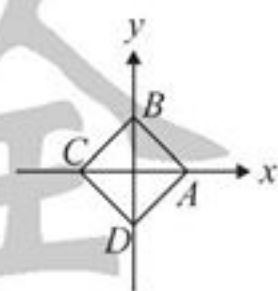
其中 $A_1(1,0)$ 、 $B_1(0,2)$ ，如圖(一)；二階方陣 Q

將 $A_1B_1C_1D_1$ 四點變換成 $A_2B_2C_2D_2$ 四點，其中

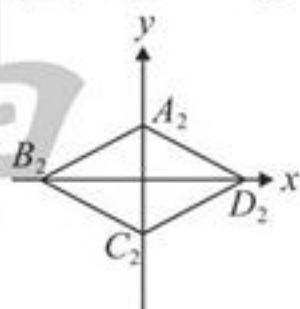
$A_2(0,1)$ 、 $B_2(-2,0)$ ，如圖(二)；二階方陣 R 將

$A_2B_2C_2D_2$ 四點變換成 $A_3B_3C_3D_3$ 四點，其中

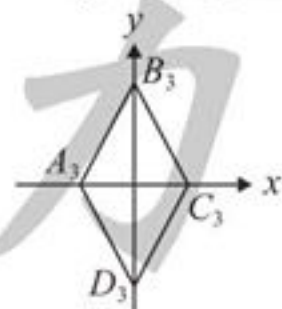
$A_3(-1,0)$ 、 $B_3(0,2)$ ，如圖(三)，設 $M = PQR$ ， $N = RPQ$ ，請選出正確的選項：



圖(一)



圖(二)



圖(三)

$$(1) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) M \text{ 可將點 } A \text{ 變換成點 } A_3$$

(5) N 可將正方形 $ABCD$ 變換成一個面積為 4 平方單位的四邊形。

答：(1)(2)(5)

148. 設函數 $f(x)$ 為一個實係數 n 次 ($n \geq 3$) 多項式函數，請選出正確的選項：

(1) 若 $f'(c) = 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = c$ 處有極值

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = c$ 處有極值，則 $f'(c) = 0$

(3) 若 $f''(c) = 0$ ，則點 $(c, f(c))$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 的反曲點

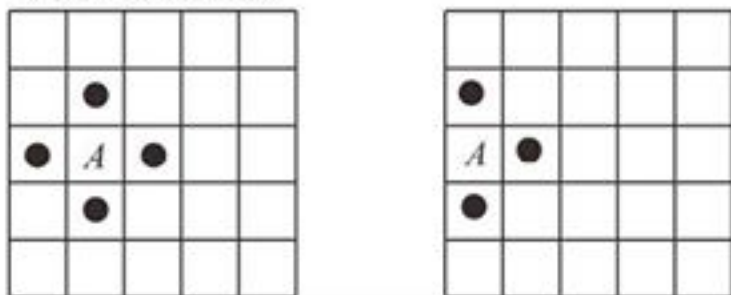
(4) 若點 $(c, f(c))$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 的反曲點，則 $f''(c) = 0$

(5) 若 $f''(x) > 0$ 且 $a < x < b$ ，則在 a 、 b 之間 $f'(x)$ 為遞增函數。

答：(2)(4)(5)

149. 秋冬是流感盛行的季節，依過去經驗，班級座位如圖所示，

座位“A”者感染流感之後，一星期內在其前、後、左、右相鄰座位“●”者，必會被傳染，其餘座位者不會被傳染。已知甲、乙兩人在同一班級，且班上有25人坐成 5×5 之正方形，今老師隨機重排座位，而甲當天恰巧感染流感，不考慮傳染再傳染的情況下（僅考慮甲直接傳染給乙），乙在一星期內因為與甲相鄰而被甲直接傳染流感的機率為_____。（化為最簡分數）



答： $\frac{2}{15}$

150. 慈幼社為籌措活動經費，計劃在國遊會中發售一款9宮格刮刮樂（如圖所示），每張的9個空格裡有3個6、3個7、3個8。買家從中任意刮開3格（超過3格則不予兌換），若刮中3個相同號碼，則可得獎金為該數字的100倍。

（例如：刮中3個6，可得獎金600元）

今此刮刮樂欲訂售價為每張50元，則該社團每張刮刮樂獲利的期望值為_____元。



答： 25

151. 設 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，令 $f(\theta) = \sin(\cos \theta)$ 、 $g(\theta) = \cos(\sin \theta)$ ，若 $f(\theta)$ 的最大值為 a ，最小值為 b ； $g(\theta)$ 的最大值為 c ，最小值為 d ，則下列選項何者正確？

(1) $b < a < d < c$ (2) $b < d < a < c$ (3) $b < a < c < d$ (4) $b < d < c < a$ (5) $b < c < d < a$ 。

答： (2)

152. 設 x 為實數，若三個週期函數 $f_1(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$ 、 $f_2(x) = \cos x + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 、 $f_3(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + 2(\sin x)(\cos x) - \sqrt{3} \cos^2 x$ 的週期及振幅分別為 T_1 、 T_2 、 T_3 及 A_1 、 A_2 、 A_3 ，請選出正確的選項：

(1) $T_1 = T_2 = 2\pi$ (2) $T_3 = \frac{\pi}{2}$ (3) $A_1 = A_3 = 2A_2$

(4) $y = f_1(x)$ 、 $y = f_2(x)$ 的函數圖形有相同的最高點

(5) $y = f_1(x)$ 、 $y = f_3(x)$ 的函數圖形有相同的最低點。

答： (1)(3)(4)

克斌

神功以
往赴

153. 已知 α 、 β 、 γ 為實係數一元三次方程式 $-x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的三個根，
當我們以 $\bar{\alpha}$ 、 $\bar{\beta}$ 、 $\bar{\gamma}$ 分別表示 α 、 β 、 γ 的共軛複數時，發現 $\alpha = \bar{\alpha}$ 、 $\beta \neq \bar{\beta}$ 。試問：

- (1) γ 和 $\bar{\gamma}$ 是否相等？請說明判斷依據。
- (2) 若 $\frac{\beta^2}{\gamma}$ 為實數，則 β 的主幅角有幾種可能？
- (3) 若 $\frac{\beta^2}{\gamma}$ 為實數，求 $\frac{\beta}{\gamma}$ 的值。

答：(1) 不相等 (2) 6種 (3) 如下

154. 設 $f(x) = \int_0^x (12t^3 + 12t^2 - 24t) dt$ ，試求：

- (1) $f(1)$ 的值。
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 的值。
- (3) $f(x)$ 的最小值。

答：(1) -5 (2) 0 (3) -32

克斌

全 全
神 力
貫 以
注 赴