倒數 30 天
衝刺 300 題
六冊五輪總複習
俞克斌杯杯 在奪標終點線等你(妳)

第六冊第四輪（每日 10 題 時間 50 分鐘）

基本必考題

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+4^{2}+4^{3}+\cdots+4^{n}}{9^{n}}$ 等於下列哪一選項的數值？
(1) $\frac{9}{10}$ (2) $\frac{10}{9}$ (3) $\frac{4}{9}$ (4) $\frac{9}{4}$ (5) $\frac{1}{9}$

答：(1)

2. 請選出正確的選項。
(1) $0.\overline{52}+0.\overline{48}=1$ (2) $0.34\overline{9}=0.35$
(3) 無窮級數 $0.7+0.077+0.00777+\cdots$ 為收斂級數
(4) $1-\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}+\cdots+\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}+\cdots=\frac{3}{7}$
(5) 無窮級數 $1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^{n}+\cdots$ 為收斂級數且總和等於 0

答：(2)(3)

3. 有一個數列 $<a_n>$，已知 $a_n=\begin{cases}(-1)^{n},1\le n<100\\ 1^{n},100\le n<200\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n},200\le n<300\\ \frac{4n+1}{2n-1},300\le n<400\\ \frac{2n+1}{4n-1},400\le n\end{cases}$，$n\in N$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=$
(1)不存在 (2)1 (3)0 (4)2 (5) $\frac{1}{2}$

答：(5)

4. 數列$\langle a_n \rangle$的首項$a_1=2$，並且對每個自然數n都有$n\left(a_{n+1}-a_n\right)=3a_n$，則下列哪些選項正確？

(1) $a_3=20$ (2) $a_8>250$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{2}{3}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}=\dfrac{1}{3}$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0$

答：(1)(4)

5. 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=$______。

答：1

6. 設$f(x)=\begin{cases}[x],1\le x<4\\ -x+7,4\le x<7\\ |x-8|-|x-10|,7\le x\le 9\end{cases}$，則$\int_1^9 f(x)dx=$______。

(1) $\dfrac{9}{2}$ (2) 7 (3) $\dfrac{15}{2}$ (4) 10 (5) $\dfrac{29}{2}$

答：(3)

進階必勝題

1. 已知$a>0$，$b>0$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n}=5$，則$a+b$的值不可能是：

(1)7 (2)8 (3)9 (4)10 (5)11。

答：(4)(5)

2. 設ΔABC是邊長為1的正三角形，線段$\overline{BC}$上有n等分點，沿點B到點C的方向，依次為點P_1、P_2、……、P_{n-1}，其中$n\ge 2$，並令向量內積的和
$S_n=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}+\dots\dots+\overrightarrow{AP_{n-1}}\cdot\overrightarrow{AC}$
(1)試以n表示向量內積$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}$。(2)求$S_n$的值。(以$n$表示)
(3)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}$。

答：(1)$\dfrac{2n^2-3n+4}{2n^2}$ (2)$\dfrac{5n^2-2}{6n}$ (3)$\dfrac{5}{6}$

3. 請選出下列正確的選項：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 極限不存在

(2) $\left[\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-1\right)\right]\left[\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\right]=0$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$，則 $(a,b)=(-1,-2)$

(4) $f(x)=\begin{cases} ax+b, x\ge 1 \\ x^2, x<1 \end{cases}$，已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 可微分，則 $(a,b)=(2,-1)$

(5) 已知 $\int(\tan x)dx=F(x)+c$，則 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=1$

答：(3)(4)(5)

4. (1)已知一可微分函數 f 滿足：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，其中 x、y 為任意的實數，若導數 $f'(0)=4$，則函數 $f(x)$ 為何？

(2)在坐標平面上，已知三次多項式函數 $g(x)$ 的圖形在點 $(0,0)$ 產生極值，而點 $(1,4)$ 為其反曲點，則函數 $g(x)$ 為何？

(3)承上述題目(1)、(2)中的函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 圖形所圍出的面積為何？

答：(1) $f(x)=4x$　(2) $g(x)=-2x^3+6x^2$　(3) 1